ISSN0386-8257

臨時別冊・数理科学

SGCライブラリ
100

For Senior & Graduate Courses

クォーク・ハドロン物理学入門

真空の南部理論を基礎として

国広 悌二　著



サイエンス社

SGC ライブラリ–100

クォーク・ハドロン物理学入門

真空の南部理論を基礎として

国広 悌二　著

サイエンス社

SGC ライブラリ（The Library for Senior & Graduate Courses）

近年，特に大学理工系の大学院の充実はめざましいものがあります．しかしながら学部上級課程並びに大学院課程の学術的テキスト・参考書はきわめて少ないのが現状であります．本ライブラリはこれらの状況を踏まえ，広く研究者をも対象とし，**数理科学諸分野および諸分野の相互に関連する領域**から，現代的テーマやトピックスを順次とりあげ，時代の要請に応える魅力的なライブラリを構築してゆこうとするものです．装丁の色調は，

数学・応用数理・統計系（黄緑），**物理学系**（黄色），**情報科学系**（桃色），

脳科学・生命科学系（橙色），**数理工学系**（紫），**経済学等社会科学系**（水色）

と大別し，漸次各分野の今日的主要テーマの網羅・集成をはかってまいります．

※ SGC1～44 省略（品切含）

47 現代物理数学への招待
鈴木淳史著 本体 1876 円

49 ソリトンと物理学
戸田盛和著 本体 1876 円

50 確率的情報処理と統計力学
田中和之編著 本体 1857 円

51 超対称性理論
太田信義・坂井典佑 共著 本体 1819 円

53 ゲノム進化を考える
斎藤成也著 本体 1429 円

54 非平衡統計力学
早川尚男著 本体 1790 円

55 超幾何関数入門
木村弘信著 本体 1857 円

56 相対性理論
三尾典克著 本体 1838 円

57 3 次元トポロジーの新展開
戸田正人著 本体 1867 円

58 数理・情報系のための整数論講義
木田雅成著 本体 1876 円

59 コンピュータ将棋の頭脳
小谷善行著 本体 1429 円

60 計算神経科学への招待
銅谷賢治著 本体 1429 円

61 演習くり込み群
柏太郎著 本体 1886 円

62 熱方程式で学ぶ逆問題
山本昌宏・金成恢 共著 本体 1429 円

63 重力理論講義
前田恵一著 本体 1886 円

64 代数幾何入門講義
小林正典著 本体 1876 円

65 ネットワーク科学への招待
青山・相馬・藤原 共編著 本体 1886 円

67 量子暗号理論の展開
小芦雅斗・小柴健史 共著 本体 1838 円

68 量子力学の考え方
根本香絵著 本体 1829 円

69 量子コンピュータの基礎［第 2 版］
細谷暁夫著 本体 1876 円

70 重点解説 基礎微分幾何
塩谷隆著 本体 1886 円

71 ε-δ 論法再入門
中神祥臣著 本体 1857 円

72 超関数・フーリエ変換入門
磯崎洋著 本体 1857 円

73 問題例で深める物理
香取眞理・中野徹 共著 本体 1981 円

74 非線形現象と微分方程式
小川知之著 本体 1781 円

75 数物系のための圏論
梶浦宏成著 本体 2143 円

76 超弦理論を学ぶための場の量子論
鈴木久男著 本体 2095 円

77 重点解説 ジョルダン標準形
西山享著 本体 1905 円

78 重点解説 ベクトル・テンソル
森川雅博著 本体 2095 円

79 行列解析の基礎
山本哲朗著 本体 2190 円

80 超弦理論の基礎
今村洋介著 本体 2429 円

81 繰りこみ群の物理と数理
伊東恵一著 本体 2190 円

82 超重力理論
谷井義彰著 本体 2381 円

83 共形場理論
伊藤克司著 本体 2238 円

84 演習形式で学ぶ相転移・臨界現象
宮下精二・轟木義一 共著 本体 2476 円

85 実例で学ぶ精度保証付き数値計算
中尾充宏・渡部善隆 共著 本体 2362 円

86 リーマン予想の数理物理
黒川信重・小山信也 共著 本体 2190 円

87 量子多体系の物理
藤本聡・川上則雄 共著 本体 2190 円

88 演習形式で学ぶリー群・リー環
示野信一著 本体 2381 円

89 弦理論の代数的基礎
髙橋篤史著 本体 2476 円

90 アインシュタイン方程式
白水徹也著 本体 2238 円

91 CP 対称性の破れ
林青司著 本体 2476 円

92 弦の場の理論
石橋延幸・村上公一 共著 本体 2429 円

93 超弦理論の応用
夏梅誠著 本体 2495 円

94 複素多様体論講義
辻元著 本体 2362 円

95 幾何学の量子化
前田吉昭・佐古彰史 共著 本体 2429 円

96 量子力学から超対称性へ
坂本眞人著 本体 2476 円

97 行列解析ノート
山本哲朗著 本体 2000 円

98 無限量子系の物理と数理
小嶋泉・岡村和弥 共著 本体 2381 円

99 現代宇宙論講義
辻川信二著 本体 2476 円

100 クォーク・ハドロン物理学入門
国広悌二著 本体 2238 円

はじめに

ハドロンというのはあまり聞き慣れないことばかも知れないが，陽子や中性子あるいは中間子など「強い相互作用」をする粒子のことである．現在ではハドロンには下部構造があり，クォークでできていることが分かっている．

自然界には区別できる 4 種類の基本的相互作用が存在する.「強い相互作用」,「弱い相互作用」，電磁相互作用，そして重力である．そのうちの「強い相互作用」の基礎理論というものが 1970 年代に解明され,「量子色力学（Quantum Chromodynamics: QCD）」と名付けられた．QCD の教える奇妙な事実の一つに,「真空」というものが「空っぽ」ではなく，非常に複雑な物質性を持っているということがある．それはまさに 2008 年にノーベル賞を受賞した南部理論に関係する話である.

「真空」というのが物質性を持っていて，普通の金属あるいは固体が，温度を変えたり圧力を加えると，相転移をして強磁性体になったり超伝導体になったりするように，この素粒子の「真空」も環境の変化によって変わるということになる．つまり，温度や密度が変わると，そこに見えてくる素粒子というものの性質が変わってくる.

「物質とは何か」ということは古来問われ続けてきた問いの一つであるが，20 世紀の物理学の成果である場の量子論はこの問いに対し明確な答えを与えた．すなわち,「物質とは量子場の励起状態のことである.」そこで重大な事は，物質と真空は相互規定的であり，現代の物質の理論は必然的に真空の理論にもなっていることである．何が物質かということは真空を決めることと等価である．そして，このことは「対称性の自発的破れ」の現象において最も明示的である.「対称性の自発的破れ」の概念が明確に認識されたのは南部による超伝導理論の定式化を通してであった．また同時に，ゼロ質量のモードが対称性を回復する集団運動として出現することが示された．このゼロ質量のモードは現在では「南部–ゴールドストーンモード」と呼ばれている．南部によって導入されたこの真空および物質の新しい見方は，物質階層を貫く普遍的な性格のものである．それは，原子核，ハドロン，クォークなどの階層の物質についても例外ではない．場の理論としての QCD の真空はカイラル対称性が自発的に破れた「秩序状態」であり，その「南部–ゴールドストーンボソン」として湯川のパイ中間子が存在する.

温度を上げていくと，エントロピー優勢の状態に変化し,「秩序状態」としての QCD 真空は変化していくであろう．すると，その変化した真空の上の素励起であるハドロンも性質を変えていくと予想される．さらには，カイラル対称性が回復し，また，ハドロンを構成するクォークやグルーオンが「解放」された状態の物質，すなわちクォーク・グルーオンプラズマ（QGP）が生まれると予想されている．このように，環境の変化に伴う QCD 真空の変化およびそれに伴うハドロンの性質の変化や QGP の生成可能性およびその性質を探る問題は現在多くの研究者の興味の的になっている.

このテキストは，そのような物理の理論的基礎をできるだけ初等的にカイラル有効模型を用いて

解説することを目的としている．また，ハドロン物質の相転移の典型例として「パイ中間子凝縮」についても解説した．しかしながら，ハドロン・クォーク系の物理学の基礎としては入れておくべき「格子 QCD」など多くの事項は紙数と著者の能力のために割愛せざるを得なかった．また，関連するトピックスとして「カラー超伝導」や閉じ込めの効果を取り入れた相図，クォーク物質の非一様相への転移，重イオン衝突での非平衡ダイナミクス等々も入れられなかった．これは著者としても残念であった．

読者としては，理科系の3回生後半から修士の学生およびこの分野の実験物理の研究者を想定している．使われる場の理論についてもできるだけ予備知識を仮定せず理解できる部分が多くなるよう，古典場の解析力学から始めてスカラー場やディラック方程式の基本事項についても解説した．また，全体としては，真空の場の理論，有限温度の場の理論そして非相対論的多体系の量子論の入門の役割を果たすことも期待している．また，最後の付録は原子核物理学の入門にもなっている．上記のような不十分な点があるとは言え，この解説に動機付けられてこの分野に参入する学生が一人でも増え，あるいは，あらたな実験の発想の一助ともなれば著者としてこれ以上の喜びはない．また，他分野の研究者がこの分野の概略を理解する上で一助になることを期待している．

このテキストの5章および6章の内容の多くは，初田哲男氏，そして一部は根本幸雄氏および北沢正清氏との共同研究の成果が基礎になっている．そのことを明記して感謝の意を表したい．また，原稿を丁寧に読んでいただき数々のエラーの指摘と貴重なアドバイスをしていただいた飯田英明氏，市原輝一氏，北沢正清氏，酒井俊太郎氏，佐藤大輔氏，根本幸雄氏にお礼を申し上げたい．さらに，飯田英明氏には第5章の図を描いていただいた．また，根本幸雄氏には6章の相図のグラフを描いていただいた．最後になったが，最後まで粘り強く原稿を待っていただいた平勢耕介氏に深謝します．

2013 年 6 月

国広 悌二

目　次

第 1 章
序：クォーク・ハドロン多体系の物理学概観

1.1 原子の有核構造

原子に有核構造があることが分かったのは 20 世紀初頭のことであった．1909 年のラザフォードの研究室におけるガイガーとマースデンによる実験である．α 粒子を金泊に衝突させると，驚いたことに α 粒子が予想外の大きな頻度で後方に，すなわち，大角度で跳ね返される，ということを見つけたのであった．その理由を説明するなかでラザフォードは 1911 年に原子の有核構造という概念に至った．大角度で散乱されるということは運動量の変化 $\Delta \boldsymbol{p}$，したがって，力積 $\boldsymbol{F}\delta t$ が大きいということであり，そのこととクーロン力が距離の 2 乗に反比例して近づくほど大きな力になる，ということから正の電荷を持った物質が中心に局在化しているという結論に導かれる．これは原子の核，英語では atomic nucleus，原子核と名付けられた．原子の半径が大体，10^{-10} m，すなわち 1 オングストロームぐらいの長さなのに対して，原子核の大きさは $10^{-15}\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{fm}$ (fm= フェムトメーター）程度であり，原子全体の 1 万から 10 万分の 1 の大きさしかない．

さらにその中を見てみると，正の電荷を持った陽子と，陽子より少し重いがほとんど同じ質量の電気的に中性の粒子，中性子，で原子核が構成されていることが分った．チャドウイックによる中性子の発見は 1932 年のことである．陽子，中性子をまとめて核子と総称する．その時代では，核子それから電子というものがそれ以上分割できない「素粒子」であった．

1.2 原子核を結合させている力と湯川理論

さて，正の電荷を持つ陽子の間には距離の 2 乗に反比例する強さの電気斥力が働いているのに，原子核がなぜ安定に存在しているのかは非常に不思議なことである．実際，そのときのポテンシャルエネルギーは MKSA 単位系で

$$U = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

と書ける.（ϵ_0 は真空の誘電率.）距離 r として原子核の世界の典型的な長さである $1\,\mathrm{fm} = 10^{-15}\,\mathrm{m}$ を代入すると，$U \simeq 1.4\,\mathrm{MeV}$, となる．これは水素原子の結合エネルギー（13.6 eV）のほぼ 10 万倍もの大きさである．原子核の中の陽子はこのような膨大な電気的エネルギーで斥け合っているのである．原子核が結合しているためには，明らかにこの大きな斥力に打ち勝つ何らかの余分な「力」が必要である．その新奇の「力」は原子核を結合させているので**核力**と呼ばれる．原子核を結合させているこの巨大な新しい力の存在に人類が気がついたのは 20 世紀に入ってからである．それでは，その核力の起源は何であろうかという当然の疑問が浮かぶであろう．それはより大きなカテゴリーである「**強い相互作用**」というものの一つである．核力をはじめベータ崩壊などの核現象に当時できたばかりの場の理論を適用した理論が**湯川の中間子理論**である．これは場の理論を用いた最初の「強い相互作用」の理論でもあった．このとき湯川が予言した粒子がパウエルによって発見された.（湯川の中間子は現在ではパイ中間子と呼ばれている.）

ちなみに，この湯川秀樹の業績の意義は，核力を場の理論に基づいて説明したということにとどまらないことは強調に値する．新しい概念あるいは新しい未知の現象があるときに，そこに新しい力，新しい素粒子を導入して，より下の物質の階層の法則としてその現象を説明しようという学問の分野を始めた，ということが言える．これは，まさに素粒子物理学，素粒子理論という分野である．すなわち，湯川秀樹は素粒子物理学のうちの素粒子理論の創始者であると言うことができる．

1.3 ハドロン共鳴の発見とクォーク

第 2 次大戦後，加速器が発達して高エネルギーの衝突実験ができるようになると，核子やパイ中間子の仲間といえる粒子が共鳴状態として存在することが明らかになった．このように生成される粒子は「強い相互作用」をする粒子であり，ハドロンと総称される．少し詳しく説明すると，自然界には「強い相互作用」,「電磁相互作用」,「弱い相互作用」，そして「重力」の 4 種類の基本相互作用があり，そのうち「強い相互作用」をする「素粒子」をハドロンと呼ぶ．

さらに現象論的な整理を行うと，いくつかの保存則や質量についての規則性が見つかった．それは，化学の歴史において定比例の法則や倍数比例の法則を見つけたのと似ている．そこで，化学反応の現象論的な解析から原子，分子の概念に至ったように，ハドロンにも構造がありハドロンを構成しているさらに下部の粒子が存在する，という考えが生まれた．すなわち，坂田昌一，ゲルマンとツバイクによるハドロンの複合模型のアイデアである．下部の粒子にはゲルマ

表 1.1　クォークとその量子数.

クォークの種類	u	d	s	c	b	t
電荷 (Q/e)	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
アイソスピンの大きさ I	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0
アイソスピンの z 成分 I_z	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	0
ストレンジネス S	0	0	-1	0	0	0
重粒子数 B	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
チャーム数 C	0	0	0	1	0	0
ボトム数 B'	0	0	0	0	-1	0
トップ数 T	0	0	0	0	0	1

ンにより,「クォーク」という名前が与えられた：我が国では，坂田により「ウルバリオン: ur-baryon」と名付けられ，1970 年代まではよく使われていた．今ではクォークという名称を用いることが一般的であるので，クォークを基礎にしたハドロンの複合模型を単に**クォーク模型**と呼ぶ．クォークはすべてスピン 1/2 を持つフェルミ粒子であり，パウリの排他律に従う．クォーク模型によると，中間子はクォークと反クォークの結合状態であり，陽子や中性子は 3 個のクォークによる複合粒子である．一般に，3 個のクォークによるハドロンを重粒子と呼ぶ．表 1.1 にクォークの種類（種類の名前はフレーバーと呼ぶ）と各クォークの持つ量子数を与えた．クォークの電荷は素電荷 $e\,(e>0)$ を単位にして分数になっている．また，各クォークは重粒子数 B が 1/3 である．u，d クォークにはアイソスピンと呼ばれる量子数 $\frac{1}{2}$ を付随させ，スピンと同様にそれぞれアイソスピンの z 成分 $\pm\frac{1}{2}$ の成分に対応させる．s，c，b，t のクォークにはそれぞれストレンジネス S，チャーム C，ボトム B'，トップ T という量子数 -1，1，-1，1 を付随させる．ストレンジネスとボトムクォークには負の量子数が付与されていることに注意しよう．このとき，$Q/e = I_z + 1/2\cdot(B+S+C+B'+T)$ の関係式が成り立っている．また，反クォークは対応するクォークと逆符号の量子数を持つ．たとえば，$\bar{\mathrm{u}}$，$\bar{\mathrm{d}}$ はそれぞれアイソスピンの z 成分が $-\frac{1}{2}$ および $+\frac{1}{2}$ の状態である．同様に，$\bar{\mathrm{s}}$ はストレンジネスが $+1$ の状態である．

表 1.2 と表 1.3 とにそれぞれ重粒子と中間子の典型例についてその質量およびスピン，パリティ等の量子数とクォーク模型によるクォーク組成を載せた．クォーク組成の欄で (?) となっているのは，それらの粒子の奇妙な性質のために単純なクォーク組成でよいかどうかまだ論争の的になっていることを示している．

ここではハドロンの質量の大きさに注目しよう．相対論的には質量はエネルギーと等価であるのでエネルギーの単位で表すのが便利である．電子の質量は約 $0.51\,\mathrm{MeV}/c^2$ である．核子は電子の 2,000 倍ほど重く，陽子が $938\,\mathrm{MeV}/c^2$，中性子が $940\,\mathrm{MeV}/c^2$ である．中性子の方が少しだけ質量が大きいことは注意

表 1.2　いくつかの重粒子の性質とそのクォーク組成.

重粒子	質量（MeV/c^2）	電荷	J^P	$I\,(I_z)$	S	クォーク組成
P	938	+1	$\frac{1}{2}^+$	$\frac{1}{2}\,(\frac{1}{2})$	0	uud
N	940	0	$\frac{1}{2}^+$	$\frac{1}{2}\,(-\frac{1}{2})$	0	ddu
N(1440)	1420-1470	1, 0	$\frac{1}{2}^+$	$\frac{1}{2}\,(\pm\frac{1}{2})$	0	uud, ddu (?)
N(1535)	1525-1535	1, 0	$\frac{1}{2}^-$	$\frac{1}{2}\,(\pm\frac{1}{2})$	0	uud, ddu (?)
Δ_{33}^{++}	1232	2	$\frac{3}{2}^+$	$\frac{3}{2}\,(\frac{3}{2})$	0	uuu
Δ_{33}^{+}	1232	1	$\frac{3}{2}^+$	$\frac{3}{2}\,(\frac{1}{2})$	0	uud
Δ_{33}^{0}	1232	0	$\frac{3}{2}^+$	$\frac{3}{2}\,(-\frac{1}{2})$	0	udd
Δ_{33}^{-}	1232	−1	$\frac{3}{2}^+$	$\frac{3}{2}\,(-\frac{3}{2})$	0	ddd
Λ	1116	0	$\frac{1}{2}^+$	0	−1	uds
Λ(1405)	∼1405	0	$\frac{1}{2}^-$	0	−1	uds (?)
Σ^+	1189	1	$\frac{1}{2}^+$	1 (1)	−1	uus
Σ^0	1193	0	$\frac{1}{2}^+$	1 (0)	−1	uds
Σ^-	1197	−1	$\frac{1}{2}^+$	1 (−1)	−1	dds
Ξ^0	1315	0	$\frac{1}{2}^+$	$\frac{1}{2}\,(\frac{1}{2})$	−2	uss
Ξ^-	1322	−1	$\frac{1}{2}^+$	$\frac{1}{2}\,(-\frac{1}{2})$	−2	dss
Ω^-	1672	−1	$\frac{3}{2}^+$	0	−3	sss

に値する．パイ中間子の質量は約 138 MeV/c^2，ロー中間子は 776 MeV/c^2．重粒子の仲間で Δ(1232)(デルタ) と呼ばれる粒子は 1232 MeV/c^2 である．

1.4　クォークの理論の発展：量子色力学

ところが，これだけではハドロンの世界の現象が系統的にうまく理解できないことが分かった．たとえば，表 1.2 にある重粒子 Δ(1232) に注目してみよう．この粒子はアイソスピンとスピンがともに 3/2 であり，パリティはプラスである．電荷は +2，+1，0，−1 の状態がある．電荷 +2 の状態は 3 個の u クォークがすべて軌道角運動量 $l = 0$ の状態に入っていると考えるとこの粒子の持つ量子数が自然に理解できる．しかし，この状態波動関数は粒子の入れ替えに対して符号を変えないのでパウリの排他律と相容れない．そこで南部らにより，クォークに新しい属性，自由度が付与されることが提案された．その属性を「色（カラー）」と呼ぶ．

強い相互作用の基礎理論は，現在では「色」の自由度を使ったゲージ場の理論 [1]~[6] で与えられることが分かっており，その理論は量子色力学（Quantum Chromodynamics: QCD）と呼ばれている．QCD はクォーク場だけではなくグルーオン場も使って書かれている．そのラグランジアンはたった 1 行で書ける非常に簡単なものである（具体形は 3 章を参照）．QCD が強い相互作用の基礎理論であることを確立する上で決定的な貢献をしたのは，グロス，ウイル

表 1.3 u, d, s クォークからなるいくつかの中間子の性質とそのクォーク組成*1).

中間子	質量	電荷	J^P	$I\,(I_z)$	クォーク組成
$\pi^{\pm}$	140	±1	0^-	$1\,(\pm1)$	$u\bar{d},\,\bar{u}d$
π^0	135	0	0^-	$1\ (0)$	$(u\bar{u}-d\bar{d})/\sqrt{2}$
$\rho^{\pm}$	776	±1	1^-	$1\,(\pm1)$	$u\bar{d},\,\bar{u}d$
ρ^0	776	0	1^-	$1\ (0)$	$(u\bar{u}-d\bar{d})/\sqrt{2}$
ω	783	0	1^-	0	$(u\bar{u}+d\bar{d})/\sqrt{2}$
$K^{\pm}$	494	±1	0^-	$\frac{1}{2}\,(\pm\frac{1}{2})$	$u\bar{s},\,\bar{u}s$
$K^0,\bar{K}^0$	498	0	0^-	$\frac{1}{2}\,(\mp\frac{1}{2})$	$d\bar{s},\,s\bar{d}$
$K^{*\pm}$	892-896	±1	1^-	$\frac{1}{2}\,(\pm\frac{1}{2})$	$u\bar{s},\,\bar{u}s$
$K^{*0}\,\bar{K}^{*0}$	896	0	1^-	$\frac{1}{2}\,(\mp\frac{1}{2})$	$d\bar{s},\,\bar{d}s$
η	548	0	0^-	0	$\sim(u\bar{u}+d\bar{d}-2s\bar{s})/\sqrt{6}$
η'	958	0	0^-	0	$\sim(u\bar{u}+d\bar{d}+s\bar{s})/\sqrt{3}$
ϕ	1019	0	1^-	0	$s\bar{s}$
σ	~500	0	0^+	0	$(u\bar{u}+d\bar{d})/\sqrt{2}\,(?)$

チェック，ポリッツアーの3人で，1973年のことであった．それは，電子を当ててその深い内部構造を探ったときに得られる核子の描像，すなわち，ほとんど自由に運動しているより小さな粒子の集合のように振る舞うという描像と整合的な性質（「漸近自由性」という）をQCDが有することを証明したことによる．ちなみに，この「色」の自由度の導入*2) だけでなくこの3人が用いたのと同じ理論が強い相互作用の基本理論ではないかという構想は，南部が1965-66年に提案している*3)．

その後，強い相互作用だけではなく弱い相互作用の理解をするためには，3世代，6種類以上のクォークが必要であるということになった．それが1973年に提唱された小林・益川理論である．現代ではその3世代，6種類全部見つかっており，しかも，その弱い相互作用の性質は，実験の誤差の範囲で小林・益川理論に合うということになった．小林・益川理論によって，重力以外の相互作用についての基本理論，すなわち，今日「標準理論」と呼ばれる基本理論がはじめて完結した，ということは強調に値する．

さて，「漸近自由性」はQCDの摂動的な性質である．一方で，量子色力学の非摂動的な性質は未だ解明しきれてないが，それが示唆する自然描像は一見不思議でとても興味深いものである．それは，場の理論としてのQCDの真空構造に関係している．

---

*1) K^0 および $\bar{K}^0$ はその線型結合で作られる C（荷電共役）と P（パリティ変換）の積変換の固有状態によって寿命 0.9×10^{-10} [s] で崩壊する場合と 5.1×10^{-8} [s] で崩壊する場合がある．

*2) N. Y. Han and Y. Nambu, Phys. Rev. **139** (1965) B1006.

*3) Y. Nambu, in Preludes in Theoretical Physics, in honor of V. F. Weisskopf, North-Holland, 1966.

1.5 物質と真空の相互規定性

「場の量子論」は**「物質とは何か？」**ということについて次のような新しい観点を与えた：すべての物質の属性の背景に量子場という場があり，物質とは量子場が励起したエネルギーが高い状態のことである．物質は1個の粒子あるいは粒子の集団として観測される．逆に，**「真空」**というのはそういう粒子あるいは粒子を記述する場が励起していないエネルギーが一番低い状態に過ぎない．したがって,「真空」を決めるということは何が物質として見えるのかを決定するということと等価である．そのことは，先駆的にはディラックの相対論的電子理論（1928年）とその負エネルギー解に対する解釈（1930年頃）の中に表れていた.「真空」というのは彼の理論によると負のエネルギーの状態に電子が充満した状態である．このように，負のエネルギー状態が占拠されていることを仮定する背景にはパウリの排他律がある．この負エネルギー状態に電子が詰まった状態からのずれが存在するとき，そこに何か物が存在すると認識する，つまり，そこに物質が存在すると認識されるのである．これを標語的に，**「物質と真空は相互規定的である」**，と言ってよい．

1.6 南部の「対称性の自発的破れ」の理論：「真空」と物質の新しい見方

この「物質と真空の相互規定性」をより豊富な内容に発展させた理論が南部の**「自発性対称性の破れ」**の理論[7]である．つまり，温度や密度あるいは磁場の強さなどで特徴付けられる環境によって，あるいは相互作用の強さによって，電子（一般には，素粒子）が占める負のエネルギーの状態の性質が変わることになる．つまり,「真空」そのものが物質のように相互作用とか環境によって変わり得るのである.「真空」からのずれとして見える粒子すなわち物質の性質が環境の変化によって違って見えることになる．このことは，すべての物理学の分野におけるいろいろな実験によって検証されている．素粒子物理学を含む現代の物質の理論は,「真空」の物性理論，物質としての「真空」の解明ということを大きな要素として含んでいる．

南部理論[7]は超伝導のバーディーン，クーパー，シュリーファー(BCS)理論[8]の深い分析に基礎をおいている．南部はさらにそこで展開された論理を素粒子の問題に適用するという飛躍を行い，相対論的場の理論を用いて定式化し「核子」の質量の生成の起源とそれに伴なうゼロ質量のボソンとしてパイ中間子を理解することができることを示した．そこでは，超伝導理論においてゲージ不変性から得られるワード–高橋関係式が重要な役割を果たしたように，軸性カレントの保存則，すなわち，カイラル変換不変性から得られるワード–高橋関係式が本質的な役割を果たす（第2章および3章を参照)．さらに，この関係式か

ら当時神秘的であった「強い相互作用」と「弱い相互作用」に関する定数を結びつける関係式（ゴールドバーガー–トリーマンの関係式[9]：具体的表式は5.2節にて後述）が自然に理解できることを示した[10],[11].

現代では,「真空」というものが空っぽのものではなくむしろ超伝導や磁気相転移を示す固体などと同様にたいへん豊かな物質性を持つという，真空と物質の新しい見方が確立している.

強い相互作用の基礎理論であるQCDの真空構造およびその環境による変化と結びつけてハドロンやクォークの世界の興味深い性質を解説することがこのテキストの目的である．そのためには，まず，場の理論における対称性と保存則について理解することからはじめなければならない.

第 2 章
場の解析力学と量子場の変換則

この章では，まず，スカラー場を用いて場の理論における基本事項を整理した後，場の対称性と保存則について解説する[1],[3],[12]．焦点はカレントの構成法とネーターの定理である．次に，ディラック場の基本事項を整理した後，カイラル対称性について解説する．ただし，$\hbar = c = 1$ の単位系を取り，4 次元の軸座標を $x^\mu = (t, \boldsymbol{x})$，メトリックを $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ とし，2 つの 4 元ベクトル a^μ, b^μ のローレンツ内積を $a_\mu b^\mu = g_{\mu\nu} a^\nu b^\mu \equiv a \cdot b$, と書く．$(\mu, \nu)$ 成分が $g_{\mu\nu}$ で表される行列の逆行列成分を $g^{\mu\nu}$ と書く：$g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = \delta^\mu_\rho$．このとき，$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = (t, -\boldsymbol{x})$，$x^2 \equiv g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = t^2 - \boldsymbol{x}^2$．また，$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\frac{\partial}{\partial x^0}, \boldsymbol{\nabla})$，$\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = (\frac{\partial}{\partial x^0}, -\boldsymbol{\nabla})$．ベクトルの空間成分には太文字を用いて，$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \equiv \sum_{k=1}^{3} a^k b^k$，などと書く．

2.1 変分原理とオイラー–ラグランジュ方程式

位置 $\boldsymbol{x}$ で指定される自由度を持つ n 成分からなる場 $\boldsymbol{\phi}(x) = \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}; t) = {}^t(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n) = (\phi_i)$ に対してはラグランジアン L はラグランジアン密度

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_i(x), \dot{\phi}_i(x), \boldsymbol{\nabla}\phi_i(x)) = \mathcal{L}(\phi_i(x), \partial_\mu \phi_i(x))$$

の空間についての和として表される：

$$L(t) = \int d^3\boldsymbol{x} \mathcal{L}(\phi_i(x), \partial_\mu \phi_i(x)). \tag{2.1}$$

ここで，$(\boldsymbol{x}; t) = x^\mu = (t, \boldsymbol{x})$ と書き換えた．今後両方の書き方を自由に併用する．また，i はフレーバーの自由度や時空成分（ベクトル場などの場合）を走る添え字である．

運動方程式は次のハミルトンの変分原理で与えられる：

$$\delta \int dt\, L(t) = 0. \tag{2.2}$$

変分，$\phi_i(x) \rightarrow \phi'_i(x) = \phi_i(x) + \delta\phi_i(x)$，を (2.2) に代入し，時間積分の上下限で $\delta\boldsymbol{\phi}(x) = 0$ という条件を課して部分積分を行うと，場 $\phi(x)$ に対する次のオイラー–ラグランジュ方程式を得る：

$$\partial_t \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_i(x)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i(x)} - \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\nabla} \phi_i(x)} \right).$$

これは次のように明白にローレンツ不変な形に表すことができる：

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i(x)} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i(x))} \right). \tag{2.3}$$

正準運動量 $\pi^i(x)$ は以下のように定義される：

$$\pi^i(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_i(x)}. \tag{2.4}$$

正準量子化は，位置座標 $\boldsymbol{x}$ を正準変数の連続的な自由度とみなして通常の量子力学の交換関係を設定することにより達成される：

$$[\phi^i(x^0, \boldsymbol{x}), \pi_j(y^0, \boldsymbol{y})]_{x^0=y^0} = i\delta^i_j\, \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}). \tag{2.5}$$

2.2 自由場の場合

自由な古典実スカラー場 $\phi(x) = \phi(\boldsymbol{x}; t)$ を記述するラグランジアン密度は

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left((\partial_\mu \phi)^2 - m^2 \phi^2 \right). \tag{2.6}$$

場の方程式はオイラー–ラグランジュ方程式 (2.3) から次のクライン–ゴルドン方程式に従うことが分かる：

$$(\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2)\phi = 0. \tag{2.7}$$

ハミルトン形式に移るために，正準運動量 $\Pi(\boldsymbol{x}; t) = \Pi(x)$ を求める：

$$\Pi(x) = \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}(x)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}(x).$$

すると，自由場のハミルトニアン H は

$$\begin{aligned} H &= \int d^3\boldsymbol{x}\, \mathcal{H} \\ \mathcal{H} &= \Pi(x)\dot{\phi}(x) - \mathcal{L} \\ &= \frac{1}{2}[\Pi^2(x) + (\boldsymbol{\nabla}\phi)^2 + m^2\phi^2(x)]. \end{aligned} \tag{2.8}$$

ハイゼンベルグ方程式

$$i\dot{\phi}(x) = [\phi(x),\, H], \quad i\dot{\Pi}(x) = [\Pi(x),\, H], \tag{2.9}$$

は場の方程式 (2.7) を導く．

場の方程式 (2.7) は線型だから，解をフーリエモードに分解して求めることができる：$\phi(x)$ が実数であることを考慮して

$$\phi(x) = \bar{\phi}_{\boldsymbol{k}} e^{-i\omega t + i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} + (\text{c.c.}) \tag{2.10}$$

を (2.7) に代入して $\omega^2 = m^2 + \boldsymbol{k}^2 \equiv \omega_{\boldsymbol{k}}^2$, $(\omega = \pm\omega_k)$ を得る．ただし，c.c. は複素共役 (complex conjugate) の略記である．

よって，

$$\phi(x) = \bar{\phi}_{\boldsymbol{k}} e^{-i\omega_k t + i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} + (\text{c.c.}). \tag{2.11}$$

これは (2.7) の特解である．(2.7) の一般解はその特解の線型結合で与えられる：

$$\phi(x) = \int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \left[a_{\boldsymbol{k}} e^{-i\omega_k t + i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} + a_{\boldsymbol{k}}^\dagger e^{i\omega_k t - i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \right]. \tag{2.12}$$

ただし，後の量子化条件を簡単にするために展開係数 $\bar{\phi}_{\boldsymbol{k}}$ を次のように表した：$\bar{\phi}_{\boldsymbol{k}} = \frac{1}{2\omega_k} a_{\boldsymbol{k}}$, $\bar{\phi}_{\boldsymbol{k}}^* = \frac{1}{2\omega_k} a_{\boldsymbol{k}}^\dagger$.

2.2.1 量子化

以上は古典場の場合である．場 $\phi(\boldsymbol{x};t) = \phi(x)$ の量子化は以下の手続きで行われる．以後，$\phi(x)$, $\Pi(\boldsymbol{x};t) = \Pi(x)$ は量子化された場である．

同時刻 $t = t'$ の量子場に対して次の正準交換関係を設定する：

$$\begin{aligned} [\phi(\boldsymbol{x};t),\, \Pi(\boldsymbol{x}';t)] &= i\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'), \\ [\phi(\boldsymbol{x};t),\, \phi(\boldsymbol{x}';t)] &= [\Pi(\boldsymbol{x};t),\, \Pi(\boldsymbol{x}';t)] = 0. \end{aligned} \tag{2.13}$$

これは，展開係数に次の交換関係を設定することと等価である：

$$\begin{aligned} \left[a_{\boldsymbol{k}},\, a_{\boldsymbol{k}'}^\dagger\right] &= 2\omega_k \cdot (2\pi)^3 \delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}'), \\ [a_{\boldsymbol{k}},\, a_{\boldsymbol{k}'}] &= \left[a_{\boldsymbol{k}}^\dagger,\, a_{\boldsymbol{k}'}^\dagger\right] = 0. \end{aligned} \tag{2.14}$$

$\phi(x)$ を次のように正振動数および負振動数部分，$\phi_+(x)$, $\phi_-(x)$ に分解する：

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \phi_+(x) + \phi_-(x), \\ \phi_+(x) &= \int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} a_{\boldsymbol{k}} e^{-ik\cdot x}, \\ \phi_-(x) &= \int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} a_{\boldsymbol{k}}^\dagger e^{ik\cdot x}. \quad (k_0 = \omega_k). \end{aligned} \tag{2.15}$$

2.2.2 ファインマンのグリーン関数（伝播関数）

グリーン関数を時間順序積として次のように定義する：

$$\begin{aligned} iD(x-y) \equiv \langle\Phi_0|T\left(\phi(x)\phi(y)\right)|\Phi_0\rangle &= \theta(x_0 - y_0)\langle\Phi_0|\phi(x)\phi(y)|\Phi_0\rangle \\ &\quad + \theta(y_0 - x_0)\langle\Phi_0|\phi(y)\phi(x)|\Phi_0\rangle. \end{aligned} \tag{2.16}$$

ただし，$|\Phi_0\rangle$ は真空である：

$$a_{\boldsymbol{k}}|\Phi_0\rangle = 0. \tag{2.17}$$

グリーン関数の具体形は以下のように求められる：

$$\begin{aligned}\langle\Phi_0|\phi(x)\phi(y)|\Phi_0\rangle &= \langle\Phi_0|\phi_+(x)\phi_-(y)|\Phi_0\rangle \\ &= \int_{k_0=\omega_k}\frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3}\frac{e^{-ik\cdot x}}{2\omega_k}\int_{k'_0=\omega_{k'}}\frac{d^3\boldsymbol{k}'}{(2\pi)^3}\frac{e^{ik'\cdot y}}{2\omega_{k'}}\langle\Phi_0|a_{\boldsymbol{k}}a^\dagger_{\boldsymbol{k}'}|\Phi_0\rangle \\ &= \int_{k_0=\omega_k}\frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3}\frac{e^{-ik\cdot(x-y)}}{2\omega_k}. \end{aligned}\tag{2.18}$$

ただし，(2.14) から得られる以下の関係式を用いた：

$$a_{\boldsymbol{k}}a^\dagger_{\boldsymbol{k}'} = 2\omega_k(2\pi)^3\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') + a^\dagger_{\boldsymbol{k}'}a_{\boldsymbol{k}}. \tag{2.19}$$

さて，微小量 $\eta > 0$ のときに成立する次の関係式に注意する：

$$\begin{aligned}\theta(t)e^{-i\omega_k t} &= -\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk_0}{2\pi i}\frac{e^{-ik_0 t}}{k_0+i\eta}\cdot e^{-i\omega_k t} \\ &= i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk_0}{2\pi}\frac{e^{-ik_0 t}}{k_0-\omega_k+i\eta}. \end{aligned}\tag{2.20}$$

第 2 の等式で $k_0+\omega_k \to k_0$ の置き換えを行った．

(2.18) および (2.20) より，

$$\theta(x_0-y_0)\langle\Phi_0|\phi(x)\phi(y)|\Phi_0\rangle = i\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{2\omega_k}\frac{e^{-ik\cdot(x-y)}}{k_0-\omega_k+i\eta}. \tag{2.21}$$

同様にして，

$$\begin{aligned}\theta(y_0-x_0)\langle\Phi_0|\phi(y)\phi(x)|\Phi_0\rangle &= i\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{2\omega_k}\frac{e^{ik\cdot(x-y)}}{k_0-\omega_k+i\eta} \\ &= i\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{2\omega_k}\frac{e^{-ik\cdot(x-y)}}{-k_0-\omega_k+i\eta}. \end{aligned}\tag{2.22}$$

さらに，

$$\frac{1}{2\omega_k}\left[\frac{1}{k_0-\omega_k+i\eta}-\frac{1}{k_0+\omega_k-i\eta}\right] = \frac{1}{2\omega_k}\frac{2\omega_k}{k_0^2-(\omega_k-i\eta)^2} \tag{2.23}$$

$$= 1/\left[k^2-m^2+i\eta\right]. \tag{2.24}$$

ここで，$k^2 \equiv k_0^2 - \boldsymbol{k}^2$ と書き，また，微小量 $2\omega_k\eta$ をあらためて η と書いた．
よって，

$$\begin{aligned}iD(x-y) &= i\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ik\cdot(x-y)}}{k^2-m^2+i\eta} \\ &\equiv \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-ik\cdot(x-y)}iD(k), \end{aligned}\tag{2.25}$$

を得る．ここに，

$$D(k) = D(k_0,\,\boldsymbol{k}) = \frac{1}{k_0^2-\boldsymbol{k}^2-m^2+i\eta}. \tag{2.26}$$

2.3 変換と保存カレント

n 個のスカラー場 $\boldsymbol{\phi}(x) = \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x};t) = {}^t(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n) = (\phi_i)$ に対して次の変換を考える：

$$\boldsymbol{\phi} \to \boldsymbol{\phi}' = \mathrm{e}^{i\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\phi}.$$

ただし，$\boldsymbol{T}$ はリー環 g をなすとする[13]：

$$[T^a, T^b] = iC_{abc}T^c. \tag{2.27}$$

C_{abc} はリー環 g の基本構造定数である*1)．微小変換では，$\delta\boldsymbol{\phi} = i\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\phi}$.

$$\delta\,\phi_i(x) = i\alpha_b(T^b)_{ij}\phi_j, \tag{2.28}$$

と書ける．

内部対称性を定義する変換と対応する保存則を記述するための「流れ（カレント）」を導入する*2)．時空間に依存したパラメーター $\alpha_a(x)$ に依存する次の変換を考えよう：

$$\phi_i(x) \to \phi_i(x) + \delta\,\phi_i(x) \equiv \phi_i(x) + i(T^b)_{ij}\alpha_b(x)\phi_j(x). \tag{2.29}$$

さらに，この微分を取って，

$$\partial_\mu\phi_i(x) \to \partial_\mu\phi_i(x) + i(T^b)_{ij}\partial_\mu(\alpha_b(x)\phi_j(x)). \tag{2.30}$$

さて，この変換によって引き起こされるラグランジアンの変化は次のように計算される：

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i(x)}\delta\phi_i(x) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i(x))}\delta(\partial_\mu\phi_i(x)).$$

右辺第 1 項に運動方程式 (2.3) を用い，第 2 項に対して変分と微分の可換性を用いると，

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= \left(\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i(x))}\right)\delta\phi_i(x) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i(x))}\partial_\mu(\delta\phi_i(x)) \\ &= \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i(x))}\delta\phi_i(x)\right).\end{aligned} \tag{2.31}$$

ここで，右辺に (2.29) を用いると，変分に関する次の基本関係式が得られる：

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu\left(i\alpha_b(x)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i(x))}(T^b)_{ij}\phi_j(x)\right). \tag{2.32}$$

---

*1) 一方，n 個の行列 T^a を $(T^a)_{bc} = iC_{bac}$ と定義すると，$[T^a, T^b] = iC_{abc}T^c$ を満たす．この表現 T を**随伴表現**という[13]．

*2) 以下の議論は文献 [14] をもとにしている．参考文献 [1], [3], [12], [15], [16] も有益である．

さて，パラメーター関数 $\alpha_a(x)$ が座標に依存しない場合を考えよう．変換 (2.29) に対して，ラグランジアン密度が不変，したがって作用も不変の場合，以下のベクトル量が保存カレントになっていることが分かる：

$$\partial^\mu j^b_\mu(x) = 0. \tag{2.33}$$

$$j^b_\mu(x) = -i\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i(x))}(T^b)_{ij}\phi_j(x). \tag{2.34}$$

場（あるいは座標）の変換に対して作用が不変の場合，保存カレントが存在することを**ネーターの定理**という*3)．

「電荷演算子」Q_b を定義する*4)：

$$\begin{aligned} Q^b(t) &\equiv \int d^3\boldsymbol{x}\, j^b_0(x) \\ &= -i(T^b)_{ij}\int d^3\boldsymbol{x}\,\pi^i(x)\phi_j(x). \end{aligned} \tag{2.35}$$

このとき，

$$\begin{aligned} [Q^a,\, Q^b] &= -(T^a)_{ij}(T^b)_{kl}\int d^3\boldsymbol{x}\, d^3\boldsymbol{y}[\pi^i\phi_j(\boldsymbol{x},t),\, \pi^k\phi_l(\boldsymbol{y},t)] \\ &= -(T^a)_{ij}(T^b)_{kl}\int d^3\boldsymbol{x}\{i\delta^k_j\pi^i\phi_l - i\delta^i_l\pi^k\phi_j\} \\ &= -i\int d^3\boldsymbol{x}[T^a,\, T^b]_{il}\pi^i\phi_l \\ &= iC_{abd}(-i)(T^d)_{il}\int d^3\boldsymbol{x}\pi^i\phi_l \\ &= iC_{abc}Q^c. \end{aligned}$$

すなわち，**ネーターカレントから作った（量子力学的）変換の生成子はもとのリー環の交換関係を満たす**：

$$[Q^a,\, Q^b] = iC_{abc}\,Q^c. \tag{2.36}$$

また，同様にして，

$$[iQ^b(t),\, \phi_i(x)] = -i(T^b)_{ij}\phi_j(x). \tag{2.37}$$

これは,「電荷演算子」Q_b が元の変換 (2.29) の生成子であることを示している．したがって，ユニタリー変換 $U(\boldsymbol{\alpha}) = \exp[i\alpha_b(x)Q^b]$ によって量子場 $\boldsymbol{\phi}$ は

$$\begin{aligned} U^{-1}(\boldsymbol{\alpha})\phi_i(x)U(\boldsymbol{\alpha}) &\simeq \phi_i(x) - \alpha_b(x)[iQ^b,\, \phi_i] \\ &= \phi_i(x) + i(T^b)_{ij}\alpha_b(x)\phi_j(x), \end{aligned} \tag{2.38}$$

と変換される．ここで，$\boldsymbol{\alpha}$ は微小とした．これは，古典場の変換性 (2.28) と形式上同じ形をしている．

---

*3) ここでは簡単のために，ラグランジアン密度の不変性からネーターの定理を導出したが，一般には作用の不変性でよい．詳しくは，たとえば，[3], [12] を参照．

*4) 係数 $-i$ は Q_b がエルミートになるために必要である．

2.4 ゲルマン–レヴィの方法

$\alpha_b(x)$ が座標依存性を持っている場合，(2.32) を (2.34) で与えられるカレントを用いて書き直すと，

$$\delta\mathcal{L} = -\alpha_b(x)\left(\partial^\mu j^b_\mu(x)\right) \; - \; j^b_\mu(x)\left(\partial^\mu \alpha_b(x)\right).$$

よって，

$$j^b_\mu(x) = -\frac{\partial\,\delta\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\alpha_b(x))}, \quad \partial^\mu j^b_\mu(x) = -\frac{\partial\,\delta\mathcal{L}}{\partial\alpha_b(x)}. \tag{2.39}$$

この簡便なカレントとそのダイバージェンスの計算方法はゲルマン（Gell-Mann）とレヴィ（Levi）による[17].

2.5 スカラー場の簡単な例

簡単な例を用いて，保存カレントや生成子を構成してみる．次の模型ラグランジアン密度を考える[16]$(\boldsymbol{\phi} \equiv {}^t(\phi_1, \phi_2))$：

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = &\; \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu\phi_1)^2 + (\partial_\mu\phi_2)^2\right] \; - \; \frac{\mu^2}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2) \; - \; \frac{\lambda}{4}(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2, \\ = &\; \frac{1}{2}|\partial_\mu\boldsymbol{\phi}|^2 \; - \; \frac{\mu^2}{2}|\boldsymbol{\phi}|^2 \; - \; \frac{\lambda}{4}|\boldsymbol{\phi}|^4. \quad (|\boldsymbol{\phi}|^2 = \phi_1^2 + \phi_2^2).\end{aligned} \tag{2.40}$$

正準運動量は

$$\pi^i(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}_i} \; = \; \dot{\phi}_i.$$

このラグランジアン密度は次の 2 次の直交変換 O(2) の下で不変である：

$$\boldsymbol{\phi} \; \to \; \boldsymbol{\phi}' \equiv \begin{pmatrix}\phi_1' \\ \phi_2'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\boldsymbol{\phi}. \tag{2.41}$$

この無限小変換は，

$$\phi_i' = \phi_i \; + \; i\alpha t_{ij}\phi_j.\text{ただし}, t = \begin{pmatrix}0 & i \\ -i & 0\end{pmatrix},$$

と書けることに注意すると，保存カレントは

$$\begin{aligned} j_\mu = &\; -i[(\partial_\mu\phi_1)t_{12}\phi_2 + (\partial_\mu\phi_2)t_{21}\phi_1] \\ = &\; (\partial_\mu\phi_1)\phi_2 \; - \; (\partial_\mu\phi_2)\phi_1. \end{aligned} \tag{2.42}$$

$$\partial_\mu j^\mu(x) = \; 0. \tag{2.43}$$

[問い] ゲルマン–レヴィの方法を用いて，保存カレントと保存則を導出せよ．

変換の生成子は

$$Q = \int d^3\boldsymbol{x}\, j_0(x)$$
$$= \int d^3\boldsymbol{x}\, (\pi^1(x)\phi_2(x) - \pi^2(x)\phi_1(x)).$$

量子化条件は，$[\phi_i(x), \pi^j(x')]_{x_0=x'_0} = i\delta_i^j\, \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')$. 変換の生成子（ユニタリー演算子）は $U(\alpha) = \mathrm{e}^{i\alpha Q}$ $(Q^\dagger = Q)$ を作用させると，

$$\phi_i(x) \;\to\; U^\dagger(\alpha)\phi_i(x)U(\alpha).$$

無限小変換では，$\delta\phi_i(x) = -i\alpha\,[Q, \phi_i]$. これを計算すると古典場の場合の変換性を再現する．

2.6 ディラック場の基本事項

スピン 1/2 の相対論的場（スピノル場）についての最小限の基本事項を整理しておく．

2.6.1 ディラック方程式

質量 M を持ち，スピンが 1/2 の相対論的粒子を表す場 $\psi(x)$ は次のディラック方程式に従う：

$$(i\gamma\cdot\partial - M)\psi(x) = \left(i\gamma^0\frac{\partial}{\partial x^0} + i\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla} - M\right)\psi(t, \boldsymbol{x}) = 0. \tag{2.44}$$

ここで，ガンマ行列 γ^μ は以下の関係式により定義される：

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbf{1}. \tag{2.45}$$

また，次の性質がある：

$$\gamma^{0\dagger} = \gamma^0, \quad \gamma^{k\dagger} = -\gamma^k, \quad \gamma^0\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0 = \gamma^\mu. \tag{2.46}$$

(2.44) および (2.46) より，$\bar{\psi}(x) \equiv \psi^\dagger(x)\gamma^0$ は以下の方程式を満たすことが分かる：

$$i\partial_\mu\bar{\psi}(x)\gamma^\mu + M\bar{\psi}(x) = 0. \tag{2.47}$$

ラグランジアンは，

$$L = \int d^4x\, \left[\frac{1}{2}\,\bar{\psi}i\gamma\cdot\overleftrightarrow{\partial}\,\psi(x) \;-\; M\bar{\psi}(x)\psi(x)\right]. \tag{2.48}$$

全微分 $-i\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)$ による表面項を無視すると，

$$L = \int d^4x\mathcal{L},$$
$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma\cdot\partial \;-\; M)\psi, \tag{2.49}$$

と書ける．

正準運動量は

$$\Pi_\psi^\alpha(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_\alpha(x)} = i\psi^{\alpha *}(x). \tag{2.50}$$

対応するハミルトニアンは

$$H = \int d\boldsymbol{x} \bar{\psi}(x)[-i\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla} + M]\psi(x). \tag{2.51}$$

ディラック場 $\psi(x)$ はローレンツ群（の普遍被覆群の $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$）の (1/2, 1/2) 表現になっている[3],[13]．

2.6.2 ディラック方程式の解

$\psi(x) = u(p)e^{-ip\cdot x}$ と置いて，(2.44) の特解としての平面波解を求める：

$$(\gamma \cdot p - M)u(p) = 0. \tag{2.52}$$

左から $(\gamma \cdot p + M)$ を掛けて，$(\gamma \cdot p + M) \cdot (\gamma \cdot p - M)u(p) = (\gamma \cdot p \gamma \cdot p - M^2)u(p) = 0$. さらに，

$$\gamma \cdot p \gamma \cdot p = \gamma^\mu p_\mu \gamma^\nu p_\nu = \frac{1}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu)p_\mu p_\nu = g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = p^2.$$

よって，$p^2 - M^2 = p_0^2 - \boldsymbol{p}^2 - M^2 = 0$ を得る．すなわち，

$$p^0 = \pm\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + M^2} \equiv \pm E_{\boldsymbol{p}}. \tag{2.53}$$

$p^0 = +E_{\boldsymbol{p}}$ のとき，4 成分スピノル $u(p)$ は以下の方程式を満たす：

$$(\gamma \cdot p - M)u(p)\Big|_{p_0 = E_{\boldsymbol{p}}} = 0. \tag{2.54}$$

一方，$p^0 = -E_{\boldsymbol{p}}$ のとき，

$$u(-E_{\boldsymbol{p}}, -\boldsymbol{p}) \equiv v(p^0 = E_{\boldsymbol{p}}, \boldsymbol{p}) = v(p) \tag{2.55}$$

と書くと，$v(p)$ は以下の方程式を満たす：

$$(\gamma \cdot p + M)v(p)\Big|_{p_0 = E_{\boldsymbol{p}}} = 0. \tag{2.56}$$

静止系 ($\boldsymbol{p} = 0$) での (2.54) と (2.56) の解をそれぞれ $u^{(r)}(0)$, $v^{(r)}(0)$ $(r = 1, 2)$ と書く：

$$u^{(1)}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u^{(2)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v^{(1)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u^{(2)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2.57}$$

すると，一般の系 $\boldsymbol{p} \neq 0$ での解は以下のように表すことができる：

$$u^{(r)}(p) = C_{\boldsymbol{p}}(M + \gamma \cdot p)u^{(r)}(0), \tag{2.58}$$

$$v^{(r)}(p) = C_{\boldsymbol{p}}(M - \gamma \cdot p)v^{(r)}(0). \tag{2.59}$$

規格化定数は

$$C_{\boldsymbol{p}} = \frac{1}{\sqrt{2M(M + E_{\boldsymbol{p}})}}. \tag{2.60}$$

ただし，次の規格化条件を課した：

$$\bar{u}^{(r)}(p)u^{(s)}(p) = \bar{u}^{(r)}(0)u^{(s)}(0) = \delta_{rs}, \tag{2.61}$$

$$\bar{v}^{(r)}(p)v^{(s)}(p) = \bar{v}^{(r)}(0)v^{(s)}(0) = -\delta_{rs}. \tag{2.62}$$

以下では，$u^{(r)}(p) \equiv u(\boldsymbol{p},\, r), v^{(r)}(p) \equiv v(\boldsymbol{p},\, r)$, などと書くことにする．

また，正，負エネルギー解への射影演算子はそれぞれ以下のように与えられる：

$$(\Lambda_+)_{\alpha\beta} \equiv \sum_r u_\alpha(\boldsymbol{p}, r)\bar{u}_\beta(\boldsymbol{p}, r) = \frac{(\gamma \cdot p + M)_{\alpha\beta}}{2M}, \tag{2.63}$$

$$(\Lambda_-)_{\alpha\beta} \equiv -\sum_r v_\alpha(\boldsymbol{p}, r)\bar{v}_\beta(\boldsymbol{p}, r) = -\frac{(\gamma \cdot p - M)_{\alpha\beta}}{2M}. \tag{2.64}$$

このとき，次の関係式が成り立つ：

$$\Lambda_+ + \Lambda_- = \boldsymbol{1}, \quad \Lambda_\pm^2 = \Lambda_\pm, \quad \Lambda_+\Lambda_- = \Lambda_-\Lambda_+ = 0. \tag{2.65}$$

一般解は以上で求まった特解の線型結合で表される：

$$\psi(x) = \sum_{r=\pm} \int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \sqrt{\frac{M}{E_{\boldsymbol{p}}}} \times \left[a(\boldsymbol{p},\, r)u(\boldsymbol{p},\, r)e^{-ip\cdot x} + b^\dagger(\boldsymbol{p},\, r)v(\boldsymbol{p},\, r)e^{ip\cdot x}\right]_{p_0 = E_p}. \tag{2.66}$$

ここで，$a(\boldsymbol{p},\, r)$ と $b^*(\boldsymbol{p},\, r)$ は展開係数である．

2.6.3 ディラック場の量子化

展開係数 $a(\boldsymbol{p},\, r)$ と $b^\dagger(\boldsymbol{p},\, r)$ に次の正準（反）交換関係を課して量子化する：

$$\{a(\boldsymbol{p},\, r),\, a^\dagger(\boldsymbol{p}',\, r')\} = \delta(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}')\,\delta_{r\,r'},$$

$$\{b(\boldsymbol{p},\, r),\, b^\dagger(\boldsymbol{p}',\, r')\} = \delta(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}')\,\delta_{r\,r'}. \tag{2.67}$$

他はすべて反可換．

ハミルトニアン (2.51) は

$$H = \sum_{r=\pm} \int d^3\boldsymbol{p} E_{\boldsymbol{p}} (a^\dagger(\boldsymbol{p},\, r)a(\boldsymbol{p},\, r) - b(\boldsymbol{p},\, r)b^\dagger(\boldsymbol{p},\, r)), \tag{2.68}$$

となる．

自由ディラック場の真空 $|0\rangle$ は粒子，反粒子ともに存在しない状態である：

$$a(\boldsymbol{p},\, r)|0\rangle = b(\boldsymbol{p},\, r)|0\rangle = 0. \quad (\forall \boldsymbol{p},\, \forall r). \tag{2.69}$$

2.6.4 ファインマンのグリーン関数（伝播関数）

質量 M のディラック場に対するファインマンの伝播関数 $S_F(x-y;M)$ は次の時間順序積の真空期待値として定義される：

$$\begin{aligned}[S_F(x-y;M)]_{\alpha\beta} &= -i\langle 0|T(\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)|0\rangle, \\ &\equiv -i\langle T(\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)\rangle, \\ &= -i\Big[\theta(x_0-y_0)\langle\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)\rangle - \theta(y_0-x_0)\langle\bar{\psi}_\beta(y)\psi_\alpha(x)\rangle\Big].\end{aligned} \tag{2.70}$$

ここに，$\psi(x)$ は量子化されたディラック場であり，(2.66) のように展開されている．ただし，$a(\boldsymbol{p},\, r)$ と $b^\dagger(\boldsymbol{p},\, r)$ は今や粒子の消滅演算子と反粒子の生成演算子である．

この展開式を代入して少し計算すると，次の表式を得る：

$$\begin{aligned}S^{>}_{F\alpha\beta}(x-y;M) \equiv\ & \langle\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)\rangle \\ =\ & \sum_{r=\pm}\int\frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\frac{M}{E_{\boldsymbol{p}}}u_\alpha(\boldsymbol{p},\, r)\bar{u}_\beta(\boldsymbol{p},\, r)e^{-ip\cdot(x-y)}\Big|_{p_0=E_{\boldsymbol{p}}}.\end{aligned} \tag{2.71}$$

$$\begin{aligned}S^{<}_{F\alpha\beta}(x-y;M) \equiv\ & \langle\bar{\psi}_\beta(y)\psi_\alpha(x)\rangle \\ =\ & \sum_{r=\pm}\int\frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\frac{M}{E_{\boldsymbol{p}}}\bar{v}_\beta(\boldsymbol{p},\, r)v_\alpha(\boldsymbol{p},\, r)e^{ip\cdot(x-y)}\Big|_{p_0=E_{\boldsymbol{p}}}.\end{aligned} \tag{2.72}$$

ここで，有用な公式 (2.20) および (2.63) を用いると，$[S_F(x-y;M)]_{\alpha\beta}$ の第 1 項は

$$-i\theta(x_0-y_0)[S^{>}_F(x-y;M)]_{\alpha\beta} = \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ip\cdot(x-y)}}{p_0-E_{\boldsymbol{p}}+i\eta}\Big(\frac{\gamma\cdot p+M}{2E_{\boldsymbol{p}}}\Big)_{\alpha\beta} \tag{2.73}$$

となる．ただし，$p_0=E_{\boldsymbol{p}}$. 同様にして，$[S_F(x-y;M)]_{\alpha\beta}$ の第 2 項は

$$\begin{aligned}& i\theta(y_0-x_0)[S^{<}_F(x-y;M)]_{\alpha\beta} \\ &= \int\frac{d^3\boldsymbol{p}'}{(2\pi)^3}\frac{M}{E_{\boldsymbol{p}'}}\sum_r v_\alpha(-\boldsymbol{p}',\, r)\bar{v}_\beta(-\boldsymbol{p}',\, r)\int\frac{d\omega}{2\pi}\frac{e^{i\omega(x_0-y_0)+i\boldsymbol{p}'\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}}{\omega-E_{\boldsymbol{p}'}+i\eta} \\ &= \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ip\cdot(x-y)}}{p_0+E_{\boldsymbol{p}}-i\eta}\Big(\frac{-E_{\boldsymbol{p}}\gamma^0-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma}+M}{2E_{\boldsymbol{p}}}\Big)_{\alpha\beta}.\end{aligned} \tag{2.74}$$

ここで，(2.64) から得られる次の関係式を用いた：

$$\sum_r v_\alpha(-\boldsymbol{p}', r)\bar{v}_\beta(-\boldsymbol{p}', r) = -\left[\frac{-(E_{\boldsymbol{p}'}\gamma^0 + \boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{\gamma}) + M}{2M}\right]_{\alpha\beta}. \qquad (2.75)$$

以上より，ファインマン伝播関数についての次の表式を得る：

$$\begin{aligned}
&S_{F\,\alpha\beta}(x-y;M)\\
&= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ip\cdot(x-y)}}{2E_{\boldsymbol{p}}}\left[\frac{E_{\boldsymbol{p}}\gamma^0 - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma} + M}{p_0 - E_{\boldsymbol{p}} + i\eta} - \frac{-E_{\boldsymbol{p}}\gamma^0 - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma} + M}{p_0 + E_{\boldsymbol{p}} - i\eta}\right]_{\alpha\beta}\\
&= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{-ip\cdot(x-y)}\frac{[p\cdot\gamma + M]_{\alpha\beta}}{p^2 - M^2 + i\eta}\\
&\equiv \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,e^{-ip\cdot(x-y)}S_F(p;M)_{\alpha\beta}. \qquad (2.76)
\end{aligned}$$

ここに，

$$S_F(p;M) \equiv \frac{1}{p\cdot\gamma - M + i\eta}. \qquad (2.77)$$

ファインマン伝播関数を用いると，場の真空期待値の計算を簡明に行うことができる．たとえば，Γ を任意の γ 行列（の積の和）として，$O = \bar{\psi}(x)\,\Gamma\,\psi(x)$ を考える．すると，

$$\begin{aligned}
\langle O\rangle &= \langle\bar{\psi}_\alpha(x)\Gamma_{\alpha\beta}\psi_\beta(x)\rangle\\
&= \lim_{y_0\to x_0+;\boldsymbol{y}\to\boldsymbol{x}}\langle\bar{\psi}_\alpha(y_0,\,\boldsymbol{y})\Gamma_{\alpha\beta}\psi_\beta(x_0,\,\boldsymbol{x})\rangle\\
&= -\lim_{y_0\to x_0+;\boldsymbol{y}\to\boldsymbol{x}}\Gamma_{\alpha\beta}\langle T(\psi_\beta(x)\bar{\psi}_\alpha(y))\rangle\\
&= -i\lim_{y_0\to x_0+;\boldsymbol{y}\to\boldsymbol{x}}\mathrm{Tr}\,[\Gamma S_F(x-y;M)]\\
&= -i\mathrm{Tr}\,\Gamma\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{1}{\gamma\cdot p - M + i\eta}. \qquad (2.78)
\end{aligned}$$

2.7 カイラル対称性

次に，複数のディラック場からなる系を考える．以下ではディラック場を q_f^a と書き，クォーク場と呼ぶ．さらに，a, f はそれぞれカラーおよびフレーバーを区別する添え字である．

クォーク場はディラック場としてスピン自由度を持つとともに，アイソスピンを拡張したフレーバー f という内部自由度とカラー a という自由度を持つ．ここではフレーバー自由度を明示的に考える．いわゆるカレントクォーク質量の軽い順に，$f = u$, d, s クォークを考え，カイラル変換を定義する．クォーク場を以下のように表す：

$$q = \begin{pmatrix} u\\ d\\ s\end{pmatrix}.$$

ここで，u, d, s はそれぞれが 4 成分のディラック場である．カラー自由度は関与しないので，あらわには書いていない．なお，以下ではガンマ行列について以下の表現を取ることにする：

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1}_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^k \\ -\sigma^k & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \ (k = 1, 2, 3). \tag{2.79}$$

ここで，$\mathbf{1}_n$ は $n \times n$ 単位行列，σ^k はパウリ行列である．さらに，γ_5 を以下のように定義する：

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1}_2 \\ \mathbf{1}_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \gamma_5^\dagger.$$

$\gamma_5^2 = \mathbf{1}_4$ なので，γ_5 の固有値は ± 1 である．この固有値を「**カイラリティ**」と呼ぶ．カイラリティが -1 および $+1$ への射影演算子はそれぞれ

$$P_L \equiv \frac{1}{2}(1 - \gamma_5), \quad P_R \equiv \frac{1}{2}(1 + \gamma_5). \quad (P_L + P_R = 1).$$

で与えられる．

[問い] 以下の関係式が成り立つことを示せ：

$$P_L^2 = P_L, \quad P_R^2 = P_R, \quad P_L P_R = P_R P_L = 0. \tag{2.80}$$

クォーク場 q_L および q_R を次のように定義する：

$$q_L = \frac{1 - \gamma_5}{2} q = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \\ s_L \end{pmatrix}, \quad q_R = \frac{1 + \gamma_5}{2} q = \begin{pmatrix} u_R \\ d_R \\ s_R \end{pmatrix}. \tag{2.81}$$

q_L, q_R はそれぞれカイラリティ -1 および $+1$ に属する固有状態になっており，左巻き（left-handed）および右巻き（right-handed）のクォーク場と呼ばれる：

$$\gamma_5 \, q_R = +q_R, \quad \gamma_5 \, q_L = -q_L.$$

次に，$q_{L(R)}$ のエルミート共役を考えてみよう：$(q_L)^\dagger = q^\dagger \frac{1-\gamma_5}{2}$ より，

$$\overline{q_L} \equiv (q_L)^\dagger \gamma^0 = q^\dagger \frac{1 - \gamma_5}{2} \gamma^0 = \overline{q} \frac{1 + \gamma_5}{2} = \overline{q} P_R.$$

L と R の添え字が入れ替わっていることに注意．$\overline{q_R}$ についても同様の計算をして，

$$\overline{q_L} = \overline{q} P_R, \quad \overline{q_R} = \overline{q} P_L \tag{2.82}$$

を得る．この関係式を用いるとディラック質量項（スカラー密度）は

$$\sigma \equiv \overline{q} q = \overline{q}(P_R + P_L) q = \overline{q} P_R q + \overline{q} P_L q = \overline{q} P_R^2 q + \overline{q} P_L^2 q = \overline{q_L} q_R + \overline{q_R} q_L,$$

となる．すなわち，左巻きと右巻きのクォーク場が分離しない．

一方，ベクトルカレントは

$$\begin{aligned} V^\mu \equiv \overline{q}\gamma^\mu q = & \ \overline{q}(P_R + P_L)\gamma^\mu (P_R^2 + P_L^2) q \\ = & \ \overline{q}(P_R + P_L) P_L \gamma^\mu q_R + \overline{q}(P_R + P_L) P_R \gamma^\mu q_L \\ = & \ \overline{q_R}\gamma^\mu q_R + \overline{q_L}\gamma^\mu q_L, \end{aligned} \tag{2.83}$$

となるので，左巻きおよび右巻きクォークが分離した形で表される．したがって，ディラックの運動項も分離した形で与えられる：

$$\mathcal{L}_0 = \bar{q} i\gamma^\mu \partial_\mu q = \overline{q_L}\, i\gamma^\mu \partial_\mu q_L \ + \overline{q_R}\, i\gamma^\mu \partial_\mu q_R.$$

2.7.1 $N_F = 2$ の場合

まず簡単のために，u, d クォークからなる 2 フレーバー ($N_F = 2$) の場合を扱う．独立な二つのスピノル $q_L = {}^t(u_L, d_L)$ と $q_R = {}^t(u_R, d_R)$ を独立な表現空間として次の変換を考える：

$$\begin{aligned} q_L \ \rightarrow \ \ & q'_L = L\, q_L \equiv U(\boldsymbol{\theta}_L) q_L, \\ q_R \ \rightarrow \ \ & q'_R = R\, q_R \equiv U(\boldsymbol{\theta}_R) q_R. \end{aligned} \tag{2.84}$$

ここで，

$$U(\boldsymbol{\theta}) = \mathrm{e}^{i\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{t}/2}, \quad \boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{t} \equiv \sum_{a=0}^{3} \theta_a \tau^a,$$

ただし，$\boldsymbol{t} = (\tau^0, \boldsymbol{\tau}) = (\mathbf{1}, \tau^1, \tau^2, \tau^3)$．ここに，$\tau^k$ $(k = 1, 2, 3)$ はパウリ行列：

$$\mathrm{Tr}\, t^a t^b = 2\delta^{ab}. \tag{2.85}$$

反クォーク場の変換も書いておこう：

$$\begin{aligned} \overline{q_L} \ \rightarrow \ \ & \overline{q'_L} = \overline{q_L} U^\dagger(\boldsymbol{\theta}_L), \\ \overline{q_R} \ \rightarrow \ \ & \overline{q'_R} = \overline{q_R} U^\dagger(\boldsymbol{\theta}_R). \end{aligned} \tag{2.86}$$

変換のパラメーター $\boldsymbol{\theta}_L$ と $\boldsymbol{\theta}_R$ が独立なので，L および R は独立な 2 次のユニタリー変換である．これを**カイラル変換**と呼ぶ．この変換は二つの独立な U(2)$\simeq$ U(1)$\otimes$ SU(2) 変換の直積からなるので，$\mathrm{U}(2)_L \otimes \mathrm{U}(2)_R \simeq \mathrm{U}(1)_L \otimes \mathrm{U}(1)_R \otimes \mathrm{SU}(2)_L \otimes \mathrm{SU}(2)_R$ 変換と書かれる．

特に，

1. $\theta_L^0 = \theta_R^0 \equiv \alpha^0$ かつ $\boldsymbol{\theta}_L = \boldsymbol{\theta}_R = \mathbf{0}$ と制限した部分変換に対しては

$$\begin{aligned} q = q_L + q_R \ \rightarrow \ L\, q_L + R\, q_R = & \ \mathrm{e}^{i\alpha^0/2} q_L + \mathrm{e}^{i\alpha^0/2} q_R \\ = & \ \mathrm{e}^{i\alpha^0/2} q. \end{aligned} \tag{2.87}$$

これは通常の位相変換 $\mathrm{U}(1)_V$ である．

2. $\theta_L^0 = \theta_R^0 = 0$ かつ $\boldsymbol{\theta}_L = \boldsymbol{\theta}_R \equiv \boldsymbol{\alpha}$ と制限した部分変換に対しては

$$\begin{aligned} q = q_L + q_R \;\rightarrow\; L\,q_L + R\,q_R = &\; \mathrm{e}^{i\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\tau}/2} q_L + \mathrm{e}^{i\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\tau}/2} q_R \\ = &\; \mathrm{e}^{i\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\tau}/2} q. \end{aligned} \tag{2.88}$$

すなわち，

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \rightarrow \mathrm{e}^{i\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\tau}/2} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}. \tag{2.89}$$

これは，**アイソスピン変換**に他ならず，また閉じた群を作っている*5)．この群を $\mathrm{SU}(2)_V$ と書く．

一方，

3. $-\boldsymbol{\theta}_L = \boldsymbol{\theta}_R \equiv \boldsymbol{\beta}$, と制限した部分変換に対しては

$$\begin{aligned} q = q_L + q_R \;\rightarrow\; L\,q_L + R\,q_R = &\; \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\tau}/2} q_L + \mathrm{e}^{i\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\tau}/2} q_R \\ = &\; U(\boldsymbol{\beta}\gamma_5) q \end{aligned} \tag{2.90}$$

となる．生成子が $\gamma_5 \boldsymbol{\tau}/2$ となっているので，この部分変換を $\mathrm{SU}(2)_A$ と書く．しかし，この変換は単位元を含まないので群をなさないことに注意しよう．

4. 最後に，$-\theta_L^0 = \theta_R^0 \equiv \beta^0$ かつ $\boldsymbol{\theta}_L = \boldsymbol{\theta}_R = \mathbf{0}$ と制限した部分変換に対しては，

$$\begin{aligned} q = q_L + q_R \;\rightarrow\; L\,q_L + R\,q_R = &\; \mathrm{e}^{-i\beta^0/2} q_L + \mathrm{e}^{+i\beta^0/2} q_R \\ = &\; \mathrm{e}^{i\beta^0 \gamma_5/2} q \end{aligned} \tag{2.91}$$

となる．この変換を $\mathrm{U}(1)_A$ 変換と呼ぶ．

ここで，$q_1 = u, q_2 = d$ と書き，次の 2×2 行列を考える（添え字の順序に注意）：

$$\Phi_{ji} = 2\,\overline{q_i}\,P_L\,q_j = 2\,\overline{q_{Ri}}\,q_{Lj}, \quad ((\boldsymbol{\Phi})_{ij} = \Phi_{ij}). \tag{2.92}$$

このとき，

$$2\,\overline{q_j}\,P_R\,q_i = 2\,\overline{q_{Lj}}\,q_{Ri} = (\boldsymbol{\Phi}^\dagger)_{ij}.$$

カイラル変換 (2.84) に対して $\boldsymbol{\Phi}$ は次のように変換される：

$$\boldsymbol{\Phi} \rightarrow U(\boldsymbol{\theta}_L)\,\boldsymbol{\Phi}\,U^\dagger(\boldsymbol{\theta}_R), \quad \boldsymbol{\Phi}^\dagger \rightarrow U(\boldsymbol{\theta}_R)\,\boldsymbol{\Phi}^\dagger\,U^\dagger(\boldsymbol{\theta}_L). \tag{2.93}$$

特に，$\mathrm{U}(1)_A$ 変換 (2.91) に対しては

$$\boldsymbol{\Phi} \rightarrow \mathrm{e}^{-i\beta}\,\boldsymbol{\Phi} \tag{2.94}$$

---

*5) $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ のとき恒等変換になる．

と変換する．

このとき，

$$I_1 \equiv \mathrm{Tr}(\mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi}^\dagger) \tag{2.95}$$

は $\mathrm{U}(2)_L \otimes \mathrm{U}(2)_R$ カイラル変換 (2.84) に対して不変である．実際，

$$\begin{aligned} I_1 \to\ & \mathrm{Tr}\left[U(\boldsymbol{\theta}_L)\mathbf{\Phi}\, U^\dagger(\boldsymbol{\theta}_R)U(\boldsymbol{\theta}_R)\mathbf{\Phi}^\dagger U^\dagger(\boldsymbol{\theta}_L)\right] \\ =\ & \mathrm{Tr}\left[U(\boldsymbol{\theta}_L)\mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi}^\dagger U^\dagger(\boldsymbol{\theta}_L)\right] \\ =\ & \mathrm{Tr}\left[\mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi}^\dagger U^\dagger(\boldsymbol{\theta}_L)U(\boldsymbol{\theta}_L)\right] \\ =\ & \mathrm{Tr}(\mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi}^\dagger). \end{aligned} \tag{2.96}$$

さて，t^a は 2×2 行列の空間の完全系をなすから，$\mathbf{\Phi}$ を t^a で展開して，

$$\mathbf{\Phi} = \sum_{a=0}^{3} \Phi_a t^a, \quad \mathbf{\Phi}^\dagger = \sum_{a=0}^{3} {\Phi_a}^\dagger t^a.$$

ここに，

$$\begin{aligned} \Phi_a =\ & \frac{1}{2}\mathrm{Tr}[\mathbf{\Phi}\, t_a] = \frac{1}{2}\Phi_{ji}(t_a)_{ij} = \overline{q_{Ri}}\, q_{Lj}(t_a)_{ij} = \overline{q_R}\, t_a\, q_L, \\ =\ & \frac{1}{2}(\sigma_a + i\pi_a). \qquad ({\Phi_a}^\dagger = \frac{1}{2}(\sigma_a - i\pi_a).) \end{aligned} \tag{2.97}$$

ただし，

$$\sigma_a \equiv \bar{q}\, t_a\, q, \quad \pi_a \equiv \bar{q}\, i\gamma_5 t_a\, q. \tag{2.98}$$

すると，

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{a,b=0}^{3} \Phi_a \Phi_b^\dagger\, \mathrm{Tr}[t^a t^b] \\ &= 2\sum_{a=0}^{3} \Phi_a \Phi_a^\dagger \\ &= \frac{1}{2}\sum_{a=0}^{3} [\bar{q}t_a(1-\gamma_5)q \cdot \bar{q}t_a(1+\gamma_5)q] \\ &= \frac{1}{2}\sum_{a=0}^{3} \left[(\bar{q}t_a q)^2 + (\bar{q}t_a i\gamma_5 q)^2\right] \\ &= \frac{1}{2}\sum_{a=0}^{3} \left[\sigma_a^2 + \pi_a^2\right]. \end{aligned} \tag{2.99}$$

同様に，$n \geq 2$ に対して，

$$I_n \equiv \mathrm{Tr}\left(\mathbf{\Phi}\,\mathbf{\Phi}^\dagger\right)^n$$

も $\mathrm{U}(2)_L \otimes \mathrm{U}(2)_R$ カイラル変換に対して不変である．

[問い] これを示せ.

[問い] 以下の等式を示せ：

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{\Phi} = &\ 2\Phi_0 = \bar{q}q + i\bar{q}i\gamma_5 q = \sigma_0 + i\pi_0, \\
\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{\Phi}^\dagger = &\ 2\Phi_0^\dagger = \bar{q}q - i\bar{q}i\gamma_5 q = \sigma_0 - i\pi_0, \\
\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{\Phi}^2 = &\ 2\sum_{a=0}^{3}\Phi_a^2 = \frac{1}{2}\sum_{a=0}^{3}(\sigma_a + i\pi_a)^2.
\end{aligned}$$

Φ および $\Phi^\dagger$ について 2 次の量として次の行列式を考える：

$$\begin{aligned}
\det\boldsymbol{\Phi} = &\ \frac{1}{2}\left[(\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{\Phi})^2 - \mathrm{Tr}\boldsymbol{\Phi}^2\right] \\
= &\ \frac{1}{2}\left[4\Phi_0^2 - 2\sum_{a=0}^{3}\Phi_a^2\right] \\
= &\ \Phi_0^2 - \sum_{a=1}^{3}\Phi_a^2. \qquad (2.100)
\end{aligned}$$

このエルミート共役の組み合わせを考えると，

$$\begin{aligned}
I_D \equiv &\ \det\boldsymbol{\Phi} + \det\boldsymbol{\Phi}^\dagger \\
= &\ \frac{1}{4}\left[\left((\sigma_0 + i\pi_0)^2 - \sum_{a=1}^{3}(\sigma_a + i\pi_a)^2\right) + \mathrm{h.c.}\right] \\
= &\ \frac{1}{2}\left[[\sigma_0^2 + \pi_a^2] - [\sigma_a^2 + \pi_0^2]\right]. \qquad (2.101)
\end{aligned}$$

[問い]

1. 2 次の行列 M に対してケーリー–ハミルトンの定理を適用して次の等式を示せ：

$$M^2 - (\mathrm{Tr}M)\,M + \det M \cdot \mathbf{1} = 0.$$

2. このトレースを取って，

$$\det M = \frac{1}{2}\left[(\mathrm{Tr}\,M)^2 - \mathrm{Tr}M^2\right]$$

を示せ.

この行列式型の相互作用 I_D は，$\bar{q}_i q_j$ の積であるから明らかに $\mathrm{U}(1)_V$ 変換に対して不変である，また，$\mathrm{SU}(2)_L \otimes \mathrm{SU}(2)_R$ に対しても不変である．実際，$\det L = \det R = 1$ のとき，

$$\det\boldsymbol{\Phi} \;\to\; \det(L\boldsymbol{\Phi}R) = (\det L)\cdot(\det\boldsymbol{\Phi})\cdot(\det R) = \det\boldsymbol{\Phi}.$$

ところが，$\mathrm{U}(1)_A$ 変換 (2.91) に対しては

$$\det\boldsymbol{\Phi} \;\to\; \mathrm{e}^{-2i\beta}\det\boldsymbol{\Phi} \quad , \tag{2.102}$$

となり，不変ではない．ただし，$\theta^0_{L(R)} = 2n\pi/2 \ (n \in \boldsymbol{Z})$ の場合は不変．したがって，I_1 と I_D の線型結合

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{SU(2)}} = &\ g_S I_1 + g_D I_D \\ = &\ (g_S + g_D)/2\cdot\left[(\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5\boldsymbol{\tau}q)^2\right] \\ &+ (g_S - g_D)/2\cdot\left[(\bar{q}\boldsymbol{\tau}q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5 q)^2\right]\end{aligned}$$

は $\mathrm{SU}(2)_L\otimes\mathrm{SU}(2)_R\otimes\mathrm{U}(1)_V\otimes\mathrm{Z}_2$ に対して不変である．特に，$g_s = g_D \equiv g/2$ のときには,

$$\mathcal{L}_{\mathrm{SU(2)}} = g/2\cdot\left[(\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5\boldsymbol{\tau}q)^2\right] = g/2\cdot(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2) \tag{2.103}$$

となる．

[問い] $\boldsymbol{\Phi}$ が $\mathrm{U}(1)_A$ 変換 (2.91) に対して (2.94) のように変換されることを用いて，(2.102) を示せ．

さて，無限小 $\mathrm{SU}(2)_V$ 変換に対して，

$$\sigma \to \sigma, \quad \boldsymbol{\pi} \to \boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\pi}. \tag{2.104}$$

これは，σ と $\boldsymbol{\pi}$ はそれぞれアイソスピン 1 重項および 3 重項として変換されることを意味する．同様にして，無限小の $\mathrm{SU}(2)_A$ 変換に対して，

$$\sigma \to \sigma - \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\pi}, \quad \boldsymbol{\pi} \to \boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{\beta}\sigma, \tag{2.105}$$

と変換されることが分かる．したがって，このことから $\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2$ の任意の関数 $V(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2)$ は $\mathrm{SU}(2)_L\otimes\ \mathrm{SU}(2)_R$ の変換に対して不変であることが分かる．

以上の考察から次のクォーク場だけで書かれた模型，南部–ヨナラシニオ (Jona-Lasinio) 模型（NJL模型），はディラック質量項 $-\bar{q}\boldsymbol{m}q$ を除いて，$\mathrm{U}(1)_V\otimes\mathrm{SU}(2)_L\otimes\mathrm{SU}(2)_R$-不変である*6)：

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = &\ \mathcal{L}_0 + \frac{g}{2} : \left[(\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5\boldsymbol{\tau}q)^2\right] :, \\ \mathcal{L}_0 \equiv &\ \bar{q}\,(i\gamma\cdot\partial - \boldsymbol{m})\,q.\end{aligned} \tag{2.106}$$

*6) 記念すべき論文 [11] でこの模型が導入されたのはまだクォーク模型が提唱される前であった．そこでのフェルミオンは核子と想定された．

ただし，$\boldsymbol{m} = \mathrm{diag}(m_u, m_d)$ はカレントクォーク質量であり，正規積は質量を含む自由ラグランジアン $\mathcal{L}_0$ の真空 $|0\rangle_0$ について取られる：すなわち，任意の演算子 O に対して，

$$:O:\equiv O \ - \ {}_0\langle 0|O|0\rangle_0.$$

クォーク場は，次の同時刻反交換関係を満たす：

$$\begin{aligned}
\{q_{\alpha i}(\boldsymbol{x},\, t),\, q^\dagger_{\beta j}(\boldsymbol{x}',\, t)\} \ &= \ \delta_{\alpha\beta}\delta_{ij}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'), \\
\{q_{\alpha i}(\boldsymbol{x},\, t),\, q_{\beta j}(\boldsymbol{x}',\, t)\} \ &= \ \{q^\dagger_{\alpha i}(\boldsymbol{x},\, t),\, q^\dagger_{\beta j}(\boldsymbol{x}',\, t)\} \ = 0.
\end{aligned} \tag{2.107}$$

ここで，α, β および i, j はそれぞれディラックスピノルのおよびフレーバー（アイソスピン）の添え字である．この模型の QCD における意義や性質については後の 5 章で詳しく議論する．カイラル変換に対して，ラグランジアン (2.106) から導かれるネーターカレントおよびそれらのダイバージェンスは以下のように与えられる：

1. $\mathrm{SU}(2)_V$ 変換に対して，

$$\begin{aligned}
\partial^\mu\left(\bar{q}\,\gamma_\mu\tau^a/2\,q\right) \ &\equiv \ \partial^\mu j^a_\mu(x) \\
&= \ i\sum_{i,j=u,d}\bar{q}_i(m_i-m_j)\tau^a/2\,q_j.
\end{aligned} \tag{2.108}$$

ネーターカレントの第 0 成分の空間積分が変換の生成子を与える：

$$Q^a \ = \int d^3\boldsymbol{x}\, j^a_0(x) \ = \int d^3\boldsymbol{x}\, q^\dagger\,\tau^a/2\,q. \tag{2.109}$$

2. $\mathrm{SU}(2)_A$ 変換に対して，

$$\begin{aligned}
\partial^\mu\left(\bar{q}\,\gamma_\mu\gamma_5\tau^a/2\,q\right) \ &\equiv \ \partial^\mu j^a_{5\mu}(x) \\
&= \ i\sum_{i,j=u,d}\bar{q}_i\,(m_i+m_j)\gamma_5\tau^a/2\,q_j.
\end{aligned} \tag{2.110}$$

したがって，SU(2) 軸性変換の生成子は

$$Q^a_5 \ = \int d^3\boldsymbol{x}\, j^a_{50}(x) \ = \int d^3\boldsymbol{x}\, q^\dagger\,\gamma_5\tau^a/2\,q. \tag{2.111}$$

3. $\mathrm{U}(1)_A$ 変換に対して，

$$\begin{aligned}
\partial^\mu\left(\bar{q}\,\gamma_\mu\gamma_5\,q\right) \ &\equiv \ \partial^\mu j^0_{5\mu}(x) \\
&= \ 2i\sum_{i=u,d}\bar{q}_i\,m_i\gamma_5\,q_i \\
&\quad +4g_{_D}\,i(\det\boldsymbol{\Phi}^\dagger-\det\boldsymbol{\Phi}).
\end{aligned} \tag{2.112}$$

ただし見やすくするために，変換 (2.91) に対して直接ゲルマン–レヴィの方法を適用したときに得られるものを 2 倍した表式を書いた．

これより，クォーク質量が有限でも $m_u = m_d$ のときは，アイソスピンカレント $j^a_\mu(x)$ は保存カレントになることが分かる．一方，3 重項軸性カレント $j^a_{5\mu}(x)$ はクォーク質量が有限である限り保存カレントではない．さらに，1 重項軸性カレント $j^0_{5\mu}(x)$ はクォーク質量がゼロのカイラル極限においても，軸性異常項（I_D）のためにに保存カレントにならない．

[問い] 以下の等式を示せ：

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\det\boldsymbol{\Phi} \equiv\ & \frac{1}{2i}\left(\det\boldsymbol{\Phi} - \det\boldsymbol{\Phi}^\dagger\right)\\ =\ & \frac{1}{2}(\bar{q}q\,\bar{q}i\gamma_5 q\ -\ \bar{q}\boldsymbol{\tau}q\cdot\bar{q}i\gamma_5\boldsymbol{\tau}q).\end{aligned}$$

反交換関係 (2.107) を用いると，6 個の生成子 Q^a, $Q^a_5\,(a = 1, 2, 3)$ は次の交換関係を満たす：

$$[Q^a,\, Q^b] =\ i\epsilon^{abc}\,Q^c,\quad [Q^a,\, Q^b_5] = i\epsilon^{abc}\,Q^c_5,\quad [Q^a_5,\, Q^b_5] = i\epsilon^{abc}\,Q^c. \tag{2.113}$$

$\{Q^a_5\}$（$a = 1,\,2,\,3$）は代数として閉じていないことに注意しよう（$\mathrm{SU}(2)_A$ が群をなさないことに対応する）．この計算は以下のようにすると比較的簡単に行える [15]．まずここで現われる交換関係は一般に次のように書ける：

$$[\bar{q}(x)\,\mathcal{O}\,q(x),\,\bar{q}(x')\,\mathcal{O}'\,q(x')]_{x_0=x'_0}.$$

ただし，ここに $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}'$ はガンマ行列 Γ_α とパウリ行列 τ^a の積である．この場合，次の 2 つの公式が有用である：

$$[AB,\,CD] =\ -AC\{D,\,B\}\ +\ A\{C,\,B\}D\ -\ C\{D,\,A\}B\ +\ \{C,\,A\}DB, \tag{2.114}$$

$$\left[\Gamma_\alpha\tau^a, \Gamma_\beta\tau^b\right] =\ \frac{1}{2}\{\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta\}[\tau^a, \tau^b]\ +\ \frac{1}{2}[\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta]\{\tau^a, \tau^b\}. \tag{2.115}$$

まず，第 1 の公式を用いて，

$$[\bar{q}(x)\,\mathcal{O}\,q(x),\,\bar{q}(x')\,\mathcal{O}'\,q(x')]_{x_0=x'_0} = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')q^\dagger(x_0, \boldsymbol{x})\,[\gamma^0\mathcal{O},\,\gamma^0\mathcal{O}']\,q(x_0, \boldsymbol{x}').$$

たとえば，$\mathcal{O} = \gamma^\mu(\tau^a/2)$，$\mathcal{O} = \gamma^0(\tau^b/2)$ の場合，

$$\begin{aligned}&\left[\gamma^0\gamma^\mu(\tau^a/2),\,(\gamma^0)^2(\tau^b/2)\right]\\ &= \frac{1}{2}\{\gamma^0\gamma^\mu, 1\}[\tau^a/2, \tau^b/2]\ +\ \frac{1}{2}[\gamma^0\gamma^\mu, 1]\{\tau^a/2, \tau^b/2\}\\ &= \gamma^0\gamma^\mu\,i\epsilon^{abc}(\tau_c/2),\end{aligned}$$

となるので，

$$[j^a_\mu(x),\, \bar{q}(x')\,\gamma^0(\tau^b/2)\,q(x')]_{x_0=x'_0} = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\,i\epsilon^{abc}j^c_\mu(x) \tag{2.116}$$

を得る．全く同様にして，

$$\begin{aligned}
\left[j^a_\mu(x),\, \bar{q}(x')\,\gamma^0\gamma^5(\tau^b/2)\,q(x')\right]_{x_0=x'_0} &= \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\,i\epsilon^{abc}j^c_\mu(x),\\
\left[j^a_{5\mu}(x),\, \bar{q}(x')\,\gamma^0\gamma^5(\tau^b/2)\,q(x')\right]_{x_0=x'_0} &= \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\,i\epsilon^{abc}j^c_{5\mu}(x)
\end{aligned} \tag{2.117}$$

を得る．これを $\boldsymbol{x}'$ で積分すると，

$$\begin{aligned}
\left[j^a_\mu(x),\, Q^b(x_0)\right] &= i\epsilon^{abc}j^c_\mu(x),\\
\left[j^a_\mu(x),\, Q^b_5(x_0)\right] &= i\epsilon^{abc}j^c_{5\mu}(x),\\
\left[j^a_{5\mu}(x),\, Q^b_5(x_0)\right] &= i\epsilon^{abc}j^c_\mu(x).
\end{aligned} \tag{2.118}$$

さらに，$\mu=0$ と置いて，(2.118) を $\boldsymbol{x}$ で積分すると，(2.113) が得られる．

[問い] 以下の関係式を示せ（$\pi^b(x)=\bar{q}i\gamma_5\tau^b q(x)$）：

$$[j^a_{50}(\boldsymbol{x},t),\, \pi^b(\boldsymbol{x}',t)] = i\delta^{ab}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\,\bar{q}q(x), \tag{2.119}$$

$$\left[Q^a_5(x^0),\, \pi^b(x)\right] = i\delta^{ab}\,\bar{q}q(x). \tag{2.120}$$

交換関係 (2.113) は SO(4) のリー環のそれと同じである*7)．さらに，次のように生成子の線型結合を定義すると，これらはそれぞれ閉じた代数su(2) を構成し，したがって，全体として $\mathrm{su}(2)_L\otimes\mathrm{su}(2)_R$ の代数となる：

$$Q^a_L \equiv \frac{1}{2}(Q^a - Q^a_5), \quad Q^a_R \equiv \frac{1}{2}(Q^a + Q^a_5). \tag{2.121}$$

実際，(2.113) より，次の交換関係を容易に導くことができる：

$$[Q^a_L,\, Q^b_L] = i\epsilon^{abc}\,Q^c_L, \quad [Q^a_R,\, Q^b_R] = i\epsilon^{abc}\,Q^c_R, \quad [Q^a_L,\, Q^b_R] = 0. \tag{2.122}$$

これは，よく知られた同型関係 SO(4)≃SU(2)⊗SU(2) の具体例となっている．興味深いことは，この代数が量子力学における水素原子の系の隠れた対称性としても現われ，その大きい縮退の起源となっていることである．たとえば，教科書 [18] および参考文献 [13] のうち佐藤光氏のものを参照のこと．

さて，σ と $\boldsymbol{\pi}$ を上記の変換性を持つスカラー場とみなすと，次の線型シグマ模型のラグランジアン

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[(\partial_\mu\sigma)^2 + (\partial_\mu\boldsymbol{\pi})^2] - V(\sigma^2+\boldsymbol{\pi}^2), \tag{2.123}$$

---

*7) アイソスピン変換の生成子 Q^a はそれだけで閉じていて，SU(2) のリー環になっている．

は SU(2)$_L$⊗SU(2)$_R$-不変である．ここで，$\sigma \sim \bar{q}q/\sqrt{2} = (\bar{u}u + \bar{d}d)/\sqrt{2}$ はアイソスピン 1 重項であり，$\pi^0 \sim \bar{q}i\gamma_5\tau^3 q = (\bar{u}i\gamma_5 u - \bar{d}i\gamma_5 d)/\sqrt{2}$ はアイソスピン 3 重項である．このとき，粒子状態から作る場合と符号が逆になっていることに注意しよう．これは，反クォーク場 $\bar{u}, \bar{d}$ から作ったアイソスピン 2 重項は

$$\begin{pmatrix} -\bar{d} \\ \bar{u} \end{pmatrix} \tag{2.124}$$

と書けるからである．実際，$\boldsymbol{\alpha} = (0, \theta, 0)$ のとき，$\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\tau} = \theta\,\tau_2$ であるから，アイソスピン変換 (2.89) は，

$$\begin{aligned} u = &\ \cos\theta\, u + \sin\theta\, d, \\ d = &\ \cos\theta\, d - \sin\theta\, u. \end{aligned} \tag{2.125}$$

反粒子に対しては，

$$\begin{aligned} \bar{u} = &\ \cos\theta\, \bar{u} + \sin\theta\, \bar{d}, \\ \bar{d} = &\ \cos\theta\, \bar{d} - \sin\theta\, \bar{u}. \end{aligned} \tag{2.126}$$

さらに，u, d クォークの反粒子 $\bar{\mathrm{u}}, \bar{\mathrm{d}}$ がそれぞれアイソスピンの z 成分が $-\frac{1}{2}$ および $+\frac{1}{2}$ の状態であることを考慮すると，位相を考慮して，${}^t(-\bar{d}, \bar{u})$ が $q = {}^t(u, d)$ と同じ変換性を持ち，アイソスピン 2 重項の表現になっていることが了解できる：

$$\begin{aligned} -\bar{d} = &\ \cos\theta\,(-\bar{d}) + \sin\theta\, \bar{u}. \\ \bar{u} = &\ \cos\theta\, \bar{u} - \sin\theta\,(-\bar{d}). \end{aligned} \tag{2.127}$$

[問い] 線型シグマ模型のラグランジアン (2.123) が無限小カイラル変換 (2.104)，(2.105) に対して不変であることを確かめよ．また，それぞれの変換に対するネーターカレントが以下のように与えられことを示せ：

$$j^a_\mu = \epsilon^{abc}(\partial_\mu \pi^b)\,\pi^c, \quad j^a_{5\mu} = \pi^a \partial_\mu \sigma - \sigma \partial_\mu \pi^a.$$

2.7.2 $N_F = 3$ の場合

次に s クォークを加えて，フレーバーの数が 3 の場合を考える．このときカイラル変換は次のように与えられる（$i, j =$u, d, s）：

$$P_L q_i \equiv q_{iL} \to L_{ij} q_{jL}, \quad P_R q_i \equiv q_{iR} \to R_{ij} q_{jR}. \tag{2.128}$$

ここに，L, R はそれぞれ独立な 3 次のユニタリー変換行列である：

$$\begin{aligned} L = &\ \exp(i\boldsymbol{\theta}_L \cdot \boldsymbol{\lambda}/2) \equiv U(\boldsymbol{\theta}_L), \\ R = &\ \exp(i\boldsymbol{\theta}_R \cdot \boldsymbol{\lambda}/2) = U(\boldsymbol{\theta}_R). \end{aligned} \tag{2.129}$$

ここで，

$$\boldsymbol{\theta}_{L,R}\cdot\boldsymbol{\lambda}=\sum_{k=0}^{8}\theta_{L,R}^{k}\lambda_k.$$

λ_α $(\alpha=0,1,2,\cdots 8)$ は 3 次のユニタリー群の生成子であり，通常，以下の表現が取られる（ゲルマン行列）：

$$\lambda_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ \lambda_2=\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ \lambda_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$
$$\lambda_4=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\ \lambda_5=\begin{pmatrix}0&0&-i\\0&0&0\\i&0&0\end{pmatrix},\ \lambda_6=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},$$
$$\lambda_7=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix},\ \lambda_8=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix},\ \lambda_0=\sqrt{\frac{2}{3}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}. \tag{2.130}$$

これらは，以下のように規格化されている：

$$\mathrm{Tr}\lambda_\alpha\lambda_\beta=2\delta_{\alpha\beta}.\quad (\alpha,\beta=0,\,1,\,2,\,\ldots,\,8). \tag{2.131}$$

また，λ_0 以外の 8 個の生成子 $\lambda_{1\sim 8}$ は su(3) の代数を作り，以下の交換関係を満たしている：

$$[\lambda_\alpha/2,\,\lambda_\beta/2]=i\,f_{\alpha\beta\gamma}(\lambda_\gamma/2). \tag{2.132}$$

ここに，$f_{\alpha\beta\gamma}$ は SU(3) の構造定数と呼ばれる定数である [13]．SU(3) はコンパクト群のため，$f_{\alpha\beta\gamma}$ は添え字 α，β，γ について完全反対称であり，また，必要な成分の値は以下のように与えられる：

$$\begin{aligned}f_{123}=&\ 1,\\ f_{147}=&\ f_{246}=f_{257}=f_{345}=f_{516}=f_{637}=1/2,\\ f_{458}=&\ f_{678}=\sqrt{3}/2.\end{aligned} \tag{2.133}$$

[問い] $a,b=1,\,2,\ldots,\,8$ として以下の問いに答えよ：

1. 生成子を以下のように定義する：

$$\begin{aligned}Q^a(x^0)&=\int d^3\boldsymbol{x}\,q^\dagger(x)(\lambda^a/2)q(x),\\ Q_5^a(x^0)&=\int d^3\boldsymbol{x}\,q^\dagger(x)\gamma_5(\lambda^a/2)q(x).\end{aligned} \tag{2.134}$$

このとき，以下の交換関係が成り立つことを示せ：

$$\left[Q^a,\, Q^b\right] = \ \ if_{abc}Q^c, \quad \left[Q^a,\, Q_5^b\right] = if_{abc}Q_5^c, \quad \left[Q_5^a,\, Q_5^b\right] = if_{abc}Q^c. \tag{2.135}$$

Q^a，$Q_5^a\,(a=1,\,2,\ldots 8)$ は $\mathrm{SU}(3)_L \otimes \mathrm{SU}(3)_R$ 群の生成子になっていることが分かる．

2. 以下の交換関係を示せ：

$$\left[Q_5^a(x^0),\, \bar{q}i\gamma_5(\lambda^b/2)q(x)\right] = i\bar{q}\{\lambda^a/2,\, \lambda^b/2\}q(x). \tag{2.136}$$

上の問いで現われたゲルマン行列の反交換関係は以下のように与えられる：

$$\{\lambda^a/2,\, \lambda^b/2\} = \frac{1}{3}\delta_{ab}\mathbf{1} + d_{abc}\lambda^c/2. \tag{2.137}$$

もう 1 つの構造定数 d_{abc} の値は以下のようである：

$$\begin{aligned}
d_{118} = d_{228} = d_{338} = -d_{888} &= \frac{1}{\sqrt{3}}, \\
d_{146} = d_{157} = d_{256} = d_{344} = d_{355} &= \frac{1}{2}, \\
d_{247} = d_{366} = d_{377} &= -\frac{1}{2}, \\
d_{448} = d_{558} = d_{668} = d_{778} &= -\frac{1}{2\sqrt{3}}.
\end{aligned} \tag{2.138}$$

q_L および q_R に対するユニタリ変換を区別するためそれぞれ下付き添え字を付けて $\mathrm{U}(3)_L$ そして $\mathrm{U}(3)_R$ と書くと，(2.128) は直積群

$$\mathrm{U}(3)_L \otimes \mathrm{U}(3)_R \simeq \left(\mathrm{U}(1)_L \otimes \mathrm{U}(1)_R\right) \otimes \mathrm{SU}(3)_L \otimes \mathrm{SU}(3)_R$$

に対する変換を定義している．この部分変換である $\mathrm{U}(3)_V$ 変換や $\mathrm{U}(3)_A$ 変換はそれぞれ (2.129) において，

$$\boldsymbol{\theta}_L^k = \boldsymbol{\theta}_R^k \equiv \alpha^k \tag{2.139}$$

および

$$-\boldsymbol{\theta}_L^k = \boldsymbol{\theta}_R^k \equiv \beta^k \tag{2.140}$$

とした場合に対応する．

$N_F = 3$ の場合，カイラル不変なラグランジアンを構成するためには次の 3×3 行列で表されるクォーク場の双 2 次形式 Φ_{ij} を定義すると議論が見通しよくなる（$i, j = \mathrm{u},\ \mathrm{d},\ \mathrm{s}$）：

$$\Phi_{ij} \equiv \bar{q}_j(1-\gamma_5)q_i = 2\overline{q_{jR}}q_{iL} = \bar{q}_j q_i + i\bar{q}_j i\gamma_5 q_i. \tag{2.141}$$

$\mathrm{SU}(3)_L \otimes \mathrm{SU}(3)_R$ の変換のもとで，Φ_{ij} と $(\Phi^\dagger)_{ij} \equiv \bar{q}_j(1+\gamma_5)q_i = 2\overline{q_{jL}}q_{iR}$ $(\overline{q_L}q_R = (\overline{q_R}q_L)^\dagger)$, はそれぞれ次のように変換される：

$$\Phi_{ij} \to L_{ik}\Phi_{kl}R^\dagger_{lj}, \quad (\Phi^\dagger)_{ij} \to R_{ik}(\Phi^\dagger)_{kl}L^\dagger_{lj}. \tag{2.142}$$

すなわち，それぞれ $(3,\bar{3})$ および $(\bar{3},3)$ の表現として変換される．

$\mathrm{U}(1)_L \otimes \mathrm{U}(1)_R \simeq \mathrm{U}(1)_V \otimes \mathrm{U}(1)_A$ のもとでは，

$$\Phi_{ij} \to \mathrm{e}^{i(\theta_{0L}-\theta_{0R})/2}\Phi_{ij}, \quad (\Phi^\dagger)_{ij} \to \mathrm{e}^{-i(\theta_{0L}-\theta_{0R})/2}(\Phi^\dagger)_{ij}, \tag{2.143}$$

と変換される．

以上より，$I_n = \mathrm{Tr}(\Phi\Phi^\dagger)^n$ $(n = 1,2,3,...)$ は $\mathrm{U}(3)_L \otimes \mathrm{U}(3)_R$ の変換に対して不変である．特に，I_1 は

$$I_1 = \frac{1}{2}\sum_{a=0}^{8}\left[(\bar{q}\lambda^a q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5\lambda^a q)^2\right], \tag{2.144}$$

と表すこともできる．

ここで強調すべきことは，Φ についての双 2 次形式（クォーク場では 4 体フェルミ相互作用）に限る場合，$\mathrm{SU}(3)_L \times \mathrm{SU}(3)_R$ 相互作用を構成するとそれは必然的に $\mathrm{U}(3)_L \times \mathrm{U}(3)_R$ 不変になってしまう，ということである．これは，4 章で議論する低エネルギーカイラルラグランジアンにおいて「軸性異常」を表現する場合に重要な意味を持つ．

軸性異常のために，$\mathrm{U}(1)_V \otimes \mathrm{SU}(3)_L \otimes \mathrm{SU}(3)_R$ に対しては不変であるが $\mathrm{U}(1)_A$ に対して不変でない演算子が必要になる．そのような演算子でもっとも次元の低いものは $\det\Phi$ とそのエルミート共役，$\det\Phi^\dagger$ である．そのエルミートな組み合わせ

$$I_D = \det\Phi + \det\Phi^\dagger, \tag{2.145}$$

は，したがって，軸性異常を表現するクォーク間の有効相互作用である．

質量項は，それがたとえフレーバー $\mathrm{SU}(3)_f$ の 1 重項（$\sum_i \bar{q}_i q_i = \sum_i(\Phi_{ii} + (\Phi^\dagger)_{ii})/2$）であっても，一般のカイラル変換（$\boldsymbol{\theta}_L \neq \boldsymbol{\theta}_R$）に対しては不変ではない．

これらを取り入れたラグランジアンのダイナミクスについては後の章の 5.3 節で詳しく解析する．

第 3 章
QCD の基本的性質

この章では QCD の基本事項について説明する．しかしながら，ゲージ場の理論としての QCD の内容は深く多岐にわたるので，その十全な解説はこのテキストで想定しているレベルを超えているし，また著者のよくするところでもない．また，同じシリーズのモノグラフにおいて近藤慶一氏による優れた解説[6]もある．よって，以下では詳しい解説は定評のある教科書等[1]~[4], [6], [20], [21]を参照していただくこととし，ここでは基礎事項[22]に触れるのみとする．この章以降，自然単位系 ($\hbar = c = 1$) を取る．

3.1 ラグランジアン：漸近自由性と「閉じ込め」

QCD の（古典的）ラグランジアンを再掲する：

$$\mathcal{L}^{cl} = \bar{q}(i\gamma^{\mu}D_{\mu} - \boldsymbol{m})q - \frac{1}{4}F^{a}_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_{a}. \tag{3.1}$$

ここで，

$$\begin{aligned} D_{\mu} =& \ \partial_{\mu} + igt^{a}A^{a}_{\mu}, \\ F^{a}_{\mu\nu} =& \ \partial_{\mu}A^{a}_{\nu} - \partial_{\nu}A^{a}_{\mu} + gf_{abc}A^{b}_{\mu}A^{c}_{\nu}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

また，$q = {}^{t}(u, d, s, c, b, t)$ はクォーク場，$\boldsymbol{m} = \mathrm{diag}(m_u, m_d, m_s, ...)$ はクォークの質量，g は無次元の結合定数，γ^{μ} はディラックのガンマ行列，f_{abc} は（カラー）SU(3) の構造定数である．ここで，$a, b, c = 1, 2, \ldots, 8$ は SU(3) の随伴表現の自由度を走る添え字である．

$\Omega(x)$ を SU(3) の要素とする：$\Omega^{\dagger}\Omega = \mathbf{1}$, $\det\Omega = 1$. 群の要素 Ω_c ですべての群の要素と可換なものの集合は部分群を作り，中心と呼ばれる．SU(3) の中心の要素は次のように表すことができる：$\Omega_c = \mathrm{e}^{2i\pi n/3}$ $(n = 0, 1, 2)$.

このラグランジアンは古典場のラグランジアンである．量子化するにはゲージ固定項とファデーエフ–ポポフゴースト項を付け加えなければならない[3], [6]．また，量子効果の高次項に現れる発散を処理するため正則化およびくりこみを

しなければならない．その過程でエネルギースケール μ（くりこみ点）が導入され，結合定数は μ に依存するようになる；$g = g(\mu)$．物理量は組み合わせ $\alpha_s(\mu) = g^2(\mu)/(4\pi)$ で与えられる．$\alpha_s(\mu)$ の μ 依存性は摂動論の範囲では次のくりこみ群方程式で与えられる [23]；

$$\mu^2 \frac{d}{d\mu^2}\alpha_s(\mu) = \beta(\alpha_s) = -(b_0\alpha_s^2 + b_1\alpha_s^3 + b_2\alpha_s^4 + \cdots). \tag{3.3}$$

ただし，

$$b_0 = (11 - 2N_F/3)/(4\pi), \quad b_1 = (153 - 19N_F)/(24\pi^2). \tag{3.4}$$

ここに，N_F はフレーバーの数である．くりこみ処方に依存する b_2 以降の高次項は書かないでおく．$\beta(\alpha_s) < 0$ のため，$\mu \to \infty$ のとき，$\alpha_s(\mu^2) \to 0$，となる．これを**漸近自由性**という．くりこみ群方程式を解析的に解くと，

$$\begin{aligned}\alpha_s(\mu^2) = &\frac{12\pi}{(33 - 2N_F)\ln(\mu^2/\Lambda_{QCD}^2)} \\ &\times \left[1 - \frac{6(153 - 19N_F)}{(33 - 2N_F)^2}\frac{\ln(\ln(\mu^2/\Lambda_{QCD}^2))}{\ln(\mu^2/\Lambda_{QCD}^2)}\right] \\ &+ \cdots\end{aligned} \tag{3.5}$$

となる．ここで，Λ_{QCD} は強い相互作用のゲージ理論としての QCD を特徴付けるエネルギースケールを持つパラメーターである．その値は，N_F の値だけでなくくりこみの処方に依存する．いわゆる $\overline{MS}$ スキームを用いた場合，$N_F = 3$ のとき，$\Lambda_{QCD} = (339 \pm 10)$ MeV である [23]．$\alpha_s(\mu^2)$ はあるくりこみ点での値が定まればすべての μ^2 依存性が定まるので，最近では QCD を特徴付けるパラメーターとして標準模型に現われる Z ボソンの質量 ($M_z = 91.2$ GeV) に対応するスケールでの $\alpha_s(M_Z^2)$ を用いるようになった．さまざまのソースを平均した値は，

$$\alpha_s(M_Z^2) = 0.1184 \pm 0.007$$

である [23]．そのように「初期値」を決めたときの QCD の結合定数 $\alpha_s(Q)$ のスケール依存性 [23] を図 3.1 に示した．

量子色力学の漸近自由性が教える自然描像は以下のように興味深いものである．運動量移行の大きい深非弾性散乱の場合，その中間状態（「仮想状態」）は QCD の摂動計算が妥当し，ほとんど自由に運動するクォーク場とグルーオン場を用いてうまく記述される．すなわち，分解能を上げてハドロンを見ていくとその構成子であるクォークが「見えて」くることになる．ところが，さらに分解能を上げていくと，そこにはほとんど質量のない多数のクォークやグルーオンが「見える」，ということを量子色力学は教えるのである．さらに，そのような高分解能で「見える」クォークとグルーオンの相互作用は高分解能で見れば見るほど，どんどん弱くなっている．逆に分解能を弱めると ($Q \to 0$)，図 3.1 からも分かるように，結合定数が大きくなっていく．そして終には，クォー

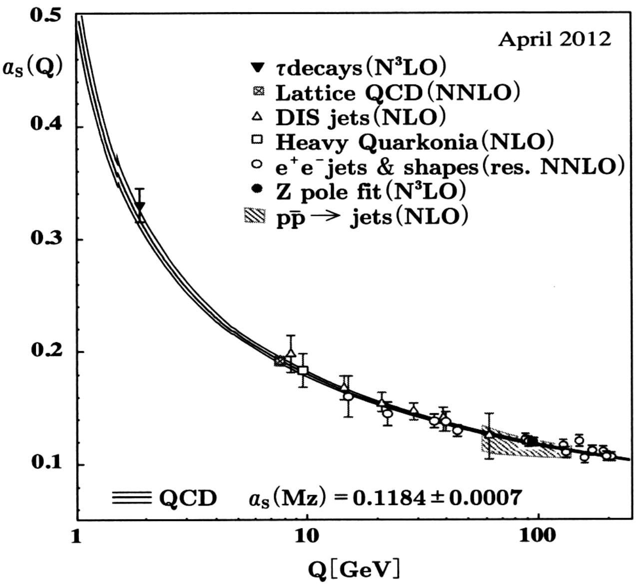


図 3.1　QCD の結合定数 $\alpha_s(Q)$ のスケール依存性．運動量移行 Q が大きい（小さい）ほど結合定数は小さく（大きく）なる．文献 [23] より．Copyright (2012) by the American Physical Society.

クとグルーオンではなく，カラーの自由度を持たない（カラー 1 重項の）複合粒子であるハドロンが単位となって現れる．標語的に言えば，分解能によって物理的自由度および法則が変化してくるということである．ハドロンは，低分解能で見える複合粒子である．

逆に言うと，'漸近状態' として実験で観測されるのはカラー 1 重項の状態のみである．そこで，QCD の非摂動的な効果により漸近状態ではカラー自由度を持った状態は物理的な状態として存在しえないのではないか，という仮説が提起される．この仮説を証明する問題は QCD の「閉じ込め問題」と呼ばれる．しかしながら，この難しい問題を十全に解説するには，紙数と著者の能力ともに不足しているので，ここでは優れた教科書 [3],[6] を引用することに留め，直感的に理解可能なアイデアを紹介することにとどめる．実際,「閉じ込め問題」の厳密な解決は現代の数理科学の中でも難問の一つと考えられている．

クォークやグルーオン間の相互作用は短距離では弱くなることは上で述べたが，逆に，長距離に行くとどんどん大きくなるであろう．それは，あたかも長距離になるとばねか「ひも」でつながっているかのようにクォーク間の力がいつまでもなくならないで，遠くに行けば行くほどそれに必要なエネルギーが大きくなる，と予想される．たとえば，中間子を作っているクォークと反クォークをあまり引き伸ばすと，それに必要なエネルギーが最も軽いパイ中間子を作るエネルギーよりも大きくなってしまう．すると，途中で反クォークとクォー

クを作ってもとのクォーク・反クォークとそれぞれ組になって二つの中間子を作る方がエネルギー的に有利になる．このようにして，単体でクォークが取り出せない，すなわち，クォークが漸近状態として現われない，ということが直感的に理解できる．

そのようなクォーク間の「ひも」を作り出す機構として，南部が提唱者の一人である「双対超伝導」のアイデア[24] は依然有力なものの一つである[6]：これは，ニールセン–オールセン[25] が第2種の超伝導体における磁束密度を伴う渦糸とハドロンの「ひも構造」の類似性を指摘したことに動機付けられたものであった．端のある「ひも」の場合を考え，ディラックの磁気モノポールの理論を援用して，双対超伝導模型が考察された．

最後に,「閉じ込め問題」解決の現象論的意義について述べる．この仮説の証明ができたとすれば，その知見によりハドロンあるいはクォーク・グルーオンの関わる現象について新奇の予言ができると可能性がある．たとえば，系統的で新たな‘エキゾティックハドロン’の予言あるいは有限温度・密度での閉じ込め-非閉じ込め相転移の実験による明快な検証方法の提案である．

3.2 カイラル対称性

次に，量子色力学を基礎理論として見たとき改めて興味深い事実はハドロンの中でのパイ中間子の際だった軽さである．伝統的なクォーク模型と量子色力学による摂動的な計算ではこの軽さは説明できない．しかも，パイ中間子は擬スカラーの場で記述される（スピン $J=0$，パリティ$P=-$）．すなわち，ローレンツ変換に対してスカラー型に変換するが，空間反転に対して符号を変える．南部の研究[10],[11] は湯川中間子の深い存在理由を明らかにしたものでもあった．

量子色力学の文脈でもこのパイ中間子の奇妙な性質は「QCD の非摂動的な真空では**カイラル対称性**が自発的に破れている」ためと理解できる*1)．すなわち，この「真空の相転移」のためにクォーク，したがって，陽子や中性子は質量を持つことになり，その代わりにパイ中間子は非常に質量が軽くなっている，と理解される．つまりパイ中間子が非常に軽い擬スカラーの粒子であるということは，陽子や中性子すなわち天然に存在する物質の質量の起源と結びついている．

QCD ラグランジアンに現れるクォークの質量は，電弱理論中のヒッグス場の期待値で与えられる質量であり，後に出てくる QCD のカイラル対称性の力学

---

*1) 現実の QCD 真空においてカイラル対称性が破れていることは格子 QCD[21] によっても検証されている：たとえば，文献 [26] を参照．そこでは，カイラル対称性を尊重した格子作用を用いることとグルーオン場の特別な配位である「インスタントン」を考慮することの重要性が強調されている．具体的には，ディラック演算子の固有値がゼロエネルギー付近に集積することが示された．運動学的な恒等式であるバンクス–キャッシャー関係式[27] によれば，それはカイラル秩序変数が有限であることを意味している．

的な破れに伴って実現する質量とは異なる．後者を構成子クォーク質量 (constituent quark mass)，前者をカレントクォーク質量 (current quark mass) という．カレントクォーク質量の値はスケールによる．$\mu \simeq 2\mathrm{GeV}$ のスケールでは，$m_u = 1.5 - 3.3$ MeV, $m_d = 3.5 - 6.0$ MeV, $m_s = 70 - 130$ MeV である [23]．これらの値は Λ_{QCD} に比べて小さい．ここでは，u, d, s の 3 種類のクォークに限ることにする．カレントクォーク質量 $\boldsymbol{m}$ が無視できるとき，QCD の運動項は左巻きと右巻きの場に分離された形で書ける：

$$\mathcal{L}^{(0)}_{\mathrm{QCD}} = \bar{q}i\gamma^\mu D_\mu q = \overline{q_L}i\gamma^\mu D_\mu q_L + \overline{q_R}i\gamma^\mu D_\mu q_R. \tag{3.6}$$

したがって，カイラル変換に対して不変である．グルーオン場はカイラル変換を受けないので，クォーク質量が無視できる場合，(古典的) QCD ラグランジアンはカイラル変換に対して不変であることが分かる．

さて，ゲルマン–レヴィの方法でカイラル変換 $U_L(3) \otimes U_R(3) \simeq \big(U_L(1) \otimes U_R(1)\big) \otimes SU_L(3) \otimes SU_R(3)$ に対応するネーターカレントを構成すると，そのダイバージェンスは以下のように与えられる：

$$\partial_\mu(\bar{q}\gamma^\mu\lambda^\alpha q) = i\sum_{i,j}(m_i - m_j)\bar{q}_i\lambda^\alpha q_j, \quad (\alpha = 0, 1, \ldots, 8), \tag{3.7}$$

$$\partial_\mu(\bar{q}\gamma^\mu\gamma^5\lambda^\alpha q) = i\sum_{i,j}(m_i + m_j)\bar{q}_i\lambda^\alpha q_j, \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, 8), \tag{3.8}$$

$$\partial_\mu(\bar{q}\gamma^\mu\gamma^5 q) = i\sum_{i}2m_i\bar{q}_i\gamma^5 q_i. \tag{3.9}$$

このように，QCD ラグランジアンに現われるクォーク質量 m_{q} はネーターカレントのダイバージェンスに現われるので，カレントクォーク質量と呼ばれるのである．

さて，(3.7) および (3.8) は量子場に対してもそのまま成立するが，(3.9) は量子場に対しては変更を受けて次のようになる；

$$\partial_\mu(\bar{q}\gamma^\mu\gamma^5 q) = i\sum_{i}2m_i\bar{q}_i\gamma^5 q_i + 2N_F\frac{g^2}{32\pi^2}F^a_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}_a. \tag{3.10}$$

ただし，$\tilde{F}^{\mu\nu}_a = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}F_{a\,\lambda\rho}$．この付け加わった項は，**古典論で成り立っていた保存則が量子効果により破れる**ことを意味する．これを**量子異常**（**アノマリー**）という．軸性カレントに対する量子異常なので，**軸性（カイラル）異常** [6], [20], [28], [29] という．この効果はたとえば擬スカラーの η' 粒子の質量がおよそ 1GeV と重いことを説明する．軸性異常については後に改めて取り上げる．

3.3 カイラル対称性の自発的破れと南部–ゴールドストーンボソン

ここでは，クォークとして軽い u，d，s クォークのみを考え，カイラル対称

性の自発的破れとそれに伴う擬スカラーの南部–ゴールドストーンボソンについて簡単に解説する．

3.3.1 カイラル対称性の自発的破れ

u，d，s クォークのカレントクォーク質量が無視できる場合（**カイラル極限**と呼ぶ）を考える．この極限では，QCD は $\mathrm{SU}(3)_L \otimes \mathrm{SU}(3)_R$-カイラル変換に対して不変である．このカイラル変換の生成子 Q^a, Q_5^a $(a = 1, 2, \ldots, 8)$ をまとめて $\tilde{Q}^\alpha$ と書くことにする．また，対応するネーターカレントを $\tilde{j}_\mu^\alpha(x)$ と書く．

QCD 真空を $|0\rangle$ と書くと，カイラル対称性は以下の二つの仕方でのみ実現される [5], [16], [20]：

1. ウィグナー型：

   任意の α に対して，

$$\tilde{Q}^\alpha |0\rangle = 0. \tag{3.11}$$

2. 南部–ゴールドストーン (NG) 型：

   これは，(3.11) が成り立たない場合である．形式的に書けば，ある α について，

$$\tilde{Q}^\alpha |0\rangle \neq 0. \tag{3.12}$$

実は，NG 型の場合，生成子 $\tilde{Q}^\alpha$ が定義できないのである*2)．実際，$|0\rangle$ と $\tilde{Q}^\alpha(0)|0\rangle$ が並進不変であることを用いると，

$$\begin{aligned}
\langle 0|\tilde{Q}^\alpha(0)\,\tilde{Q}^\alpha(0)|0\rangle &= \int d^3\boldsymbol{x} \langle 0|\tilde{j}_0^\alpha(\boldsymbol{x},0)\tilde{Q}^\alpha(0)|0\rangle \\
&= \int d^3\boldsymbol{x} \langle 0|\tilde{j}_0^\alpha(\boldsymbol{0},0)\tilde{Q}^\alpha(0)|0\rangle \\
&= \langle 0|\tilde{j}_0^\alpha(\boldsymbol{0},0)\tilde{Q}^\alpha(0)|0\rangle \int d^3\boldsymbol{x} \to \infty.
\end{aligned}$$

すなわち，空間積分が発散し定義できない．逆に，$\tilde{Q}^\alpha$ が存在する場合，真空の並進対称性と真空がエネルギー-運動量 $P_\mu = 0$ の固有状態であることから，ウィグナー型 (3.11) が帰結される [20]．

現実の QCD においては，$\langle 0| : \bar{q}q : |0\rangle \neq 0$ であることが知られている．この場合，任意の a に対して，

$$Q_5^a|0\rangle = 0 \tag{3.13}$$

では**ありえない**．実際，(2.120) の正規積を取ったものの両辺を真空ではさむと*3)

---

*2) 対称性の自発的破れと南部–ゴールドストーンの定理については，文献 [19] が詳しい．

*3) (2.120) は正規積に対しても成立する．以下，断らない限り演算子は正規積であるとする．

$$\langle 0|\left[Q_5^a(x^0), :\bar{q}i\gamma_5\tau^b q(x):\right]|0\rangle \;=\; i\delta^{ab}\langle 0|:\bar{q}q(x):|0\rangle \neq 0.$$

ところが，(3.13) が成り立っているとすると，

$$左辺 = \langle 0|Q_5^a(x^0):\bar{q}i\gamma_5\tau^b q(x):|0\rangle - \langle 0|:\bar{q}i\gamma_5\tau^b q(x):Q_5^a(x^0)|0\rangle = 0,$$

となり矛盾する．よって，QCD 真空においては，カイラル極限においても Q_5^a に関して対称性が自発的に破れているとするのが自然である．すなわち，表記的に

$$Q_5^a|0\rangle \neq 0 \quad (a = 1, 2, \ldots 8) \tag{3.14}$$

とする．また，フレーバー $SU(3)_V$ 対称性は破れていないとしよう *4)

$$Q^a|0\rangle = 0. \quad (a = 1, 2, \ldots 8). \tag{3.15}$$

一般に，(3.11) が成り立つ生成子の集合を $\mathcal{H}$ とし，$\mathcal{H}$ 内の任意の 2 つの要素を $\tilde{Q}^a = Y^a$，$\tilde{Q}^b = Y^b$ と書くと，

$$[Y^a, Y^b]|0\rangle \;=\; Y^aY^b|0\rangle \;-\; Y^bY^a|0\rangle \;=\; 0$$

となり，集合 $\mathcal{H}$ は閉じたリー代数をなす．実際，$Y^a = Q^a$ の場合は，

$$[Y^a, Y^b] \;=\; [\tilde{Q}^a, \tilde{Q}^b] = if_{abc}Q^c,$$

となり，$SU(3)_V$ をなす．

3.3.2 南部–ゴールドストーンの定理

ここでは，カレントクォーク質量 m_q がゼロのカイラル極限において成立する南部–ゴールドストーンの定理（NG 定理）の説明を行い，次に $m_q \neq 0$ だが小さいときに得られるゲルマン–オークス–レンナー関係式について解説する *5)．簡単のために $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ の場合を扱う．この節および次節の内容は少し高度なので，最初に読むときはとばしてもよい．

カイラル極限の場合を考える．次のように 2 点関数 $G_{\mu,\pi}^{ab}(x-y)$ およびそのフーリエ変換 $\tilde{G}_{\mu,\pi}^{ab}(p)$ を定義する：

$$\begin{aligned} G_{\mu,\pi}^{ab}(x-y) \equiv\; & \langle 0|T(j_{5\mu}^a(x)\pi^b(y)|0\rangle \\ =\; & \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \mathrm{e}^{-ip\cdot(x-y)} \tilde{G}_{\mu,\pi}^{ab}(p). \end{aligned} \tag{3.16}$$

このとき，$\partial_x^\mu j_{5\mu}^a(x) = 0$ より，次の関係式（ワード–高橋 (W-T) 関係式）が成立する：

---

*4)　QCD においては，ベクトル型であるアイソスピン対称性は自発的に破れない．この定理をヴァファ–ウィッテンの定理という：C. Vafa and E. Witten, Nucl. Phys. B **234** (1984) 173.

*5)　ここでの解説は主に [5] に基づく．

$$\partial_x^\mu G^{ab}_{\mu,\pi}(x-x') = \delta(x_0-x_0')\langle 0|[j^a_{50}(x),\,\pi^b(x')]|0\rangle$$
$$= i\delta^{ab}\delta(x-x')\bar{\sigma}_0. \tag{3.17}$$

ただし，交換関係 (2.119) を用いるとともに，

$$\langle 0|\bar{q}q|0\rangle \equiv \bar{\sigma}_0 \tag{3.18}$$

と置いた．定義 (3.16) を用いて (3.17) をフーリエ変換すると，

$$p^\mu\,\tilde{G}^{ab}_{\mu,\pi}(p) = \bar{\sigma}_0\,\delta^{ab}. \tag{3.19}$$

このことは，$\bar{\sigma}_0 \neq 0$ のとき $\tilde{G}^{ab}_{\mu,\pi}(p)$ が $p^2=0$ に極を持つことを意味する：実際，ローレンツ不変性より，p^2 の関数 $F^a_\pi(p^2)$ を用いて，

$$\tilde{G}^{ab}_{\mu,\pi}(p) = p_\mu F^{ab}_\pi(p^2) \tag{3.20}$$

と表すことができる．これを (3.19) に代入すると，$p^2F^{ab}_\pi(p^2) = \bar{\sigma}_0\,\delta^{ab}$．ゆえに，

$$F^{ab}_\pi(p^2) = \delta^{ab}\,\frac{\bar{\sigma}_0}{p^2}. \tag{3.21}$$

よって，

$$\tilde{G}^{ab}_{\mu,\pi}(p) = \delta^{ab}p_\mu\frac{\bar{\sigma}_0}{p^2}. \tag{3.22}$$

これは，π^a と同じ量子数を持つ質量が 0 のボソンが存在することを意味している．

問題はこの「ゼロモード」が物理的な励起かどうかということである*6)．

π^a モードのグリーン関数を次のように定義する：

$$D^{ab}(x-x') = -i\langle 0|T\pi^a(x)\pi^b(x')|0\rangle. \tag{3.23}$$

このチャンネルに $p^2 = m^2$ に物理的な極があると仮定し，上記の結果から $m^2=0$ が帰結することを見よう．すなわち，

$$\lim_{p^2\to m^2}\int d^4x D^{ab}(x)\mathrm{e}^{ip\cdot x} = \delta^{ab}\lim_{p^2\to m^2}\frac{Z}{p^2-m^2} \tag{3.24}$$

と仮定する．ここに，$Z^{1/2}$ は π^a 場の波動関数くりこみ定数であり，対称性より添え字 a に依存しない：くりこまれた π^a 場は

$$\pi^a_r(x) = Z^{-1/2}\pi^a(x), \tag{3.25}$$

と書ける．次に，次式で定義されるパイ中間子崩壊定数 f_π を導入する：

---

*6) ゲージ理論においてはこのことの吟味が重要になる．あからさまに共変な定式化を行った場合，不定計量を導入することになり，このゼロモードが正のノルムを持つかどうかを明らかにする必要がある [20]．

$$\langle 0|j_{5\mu}^a(x)|\pi^b(p)\rangle = if_\pi \delta^{ab} p_\mu \mathrm{e}^{-ip\cdot x}. \tag{3.26}$$

一方，簡約公式[3]より

$$\lim_{p^2 \to m^2} \langle 0|j_{5\mu}^a(x)|\pi_r^b(p)\rangle \;=\; -i\mathrm{e}^{-ip\cdot x} Z^{-1/2} \tilde{G}_{\mu,\pi}^{ab}(p)\cdot(p^2-m^2). \tag{3.27}$$

よって，

$$\lim_{p^2 \to m^2} \tilde{G}_{\mu,\pi}^{ab}(p)\cdot(p^2-m^2) \;=\; -\delta^{ab} Z^{1/2} f_\pi p_\mu. \tag{3.28}$$

ところが，(3.22) より，$\tilde{G}_{\mu,\pi}^{ab}(p)$ は $p^2=0$ に極を持つので，$f_\pi \neq 0$ であることより，(3.28) は

$$m^2 = 0 \tag{3.29}$$

であること，および

$$Z^{1/2} f_\pi = -\bar{\sigma}_0 = -\langle 0|\bar{q}q|0\rangle. \tag{3.30}$$

を意味する．すなわち，カイラル対称性のある理論においてスカラー密度が真空期待値を持ち，対称性が自発的に破れると，パイ中間子のチャンネルにゼロ質量のモードが現れる．また，その自由度の数 $N_{\mathrm{NG}}=3$ は破れた対称性の生成子 $Q_5^a = X^a$ の数に等しい．アイソスピンの生成子 $Q^a = Y^a$ についてはこの意味での対称性の破れはないことに注意しよう．この場合，

$$\mathrm{SU(2)}_L \otimes \mathrm{SU(2)}_R \;\to\; \mathrm{SU(2)}_V$$

と対称性が破れた，という．また，

$$\begin{aligned} N_{\mathrm{NG}} =&\; (\text{元の対称性の生成子の数}) - (\text{破れていない生成子の数}) \\ =&\; (3+3) - (3) = 3. \end{aligned} \tag{3.31}$$

となっている．このゼロモードの数も含めて南部–ゴールドストーンの定理と呼ぶ．

ここでの証明では，ローレンツ共変性を明示的に用いた．非相対論的な系あるいは有限温度・密度のようなローレンツ共変性がない系でも対称性の自発的破れに応じてゼロモードが現れる．たとえば，磁性相転移におけるスピン波である．ローレンツ共変性がない場合のモードの数と破れた対称性の数の一般的な関係は今まで得られていなかったが，最近興味深い発展があった*7)．

*7) 以下の文献を参照：H. Watanabe and H. Murayama, Phys. Rev. Lett. **108** (2012) 251602; Y. Hidaka, Phys. Rev. Lett. **110** (2013) 091601. 日本語解説記事として，渡辺悠樹，村山斉著，日本物理学会誌 **68**, No.4 P.200 (2013).

3.3.3 ゲルマン–オークス–レンナー関係式

前節の南部–ゴールドストーンの定理と (3.30) の証明において用いたのは軸性カレントとパイ場に対する W-T 関係式であった．くりこまれたパイ場 π_r^a を用いると，前節に現われた波動関数くりこみ定数 $Z^{1/2}$ とパイ中間子崩壊定数 f_π はカイラル極限の式として以下のように特徴付けられる：

$$\langle 0|\bar{q}i\gamma_5\tau^a q|\pi_r^b(p)\rangle = Z^{1/2}\delta^{ab}\mathrm{e}^{-ip\cdot x}, \tag{3.32}$$

$$\langle 0|\bar{q}\gamma_\mu\gamma_5(\tau^a/2)q|\pi_r^b(p)\rangle = if_\pi\delta^{ab}p_\mu\mathrm{e}^{-ip\cdot x}. \tag{3.33}$$

カレントクォーク質量が有限のためにカイラル対称性があらわに破れているとき，軸性カレントのダイバージェンスは

$$\partial^\mu j_{5\mu}^a(x) = 2\hat{m}\bar{q}i\gamma_5\tau^a q. \quad (\hat{m} = (m_u + m_d)/2). \tag{3.34}$$

以下の議論は $\hat{m}$ について 1 次までの展開を用いる．

(3.34) を真空と 1 パイ中間子状態ではさむと，

$$\langle 0|\partial^\mu j_{5\mu}^a(x)|\pi_r^b(p)\rangle = 2\hat{m}\langle 0|\bar{q}i\gamma_5\tau^a q|\pi_r^b(p)\rangle. \tag{3.35}$$

ここで (3.33) を用いると，左辺は

$$\langle 0|\partial^\mu j_{5\mu}^a(x)|\pi_r^b(p)\rangle = 2\delta^{ab}f_\pi m_\pi^2\mathrm{e}^{-ip\cdot x}.$$

一方，右辺は (3.32) より，

$$2\hat{m}\langle 0|\bar{q}i\gamma_5\tau^a q|\pi_r^b(p)\rangle = 2\delta^{ab}\hat{m}Z^{1/2}\mathrm{e}^{-ip\cdot x}.$$

したがって，

$$f_\pi m_\pi^2 = \hat{m}Z^{1/2} \tag{3.36}$$

を得る．さらに，両辺に f_π を掛けて，(3.30) を用いると，

$$\begin{aligned} f_\pi^2 m_\pi^2 &= \hat{m}f_\pi Z^{1/2} \\ &\simeq -\hat{m}\langle 0|\bar{q}q|0\rangle \end{aligned} \tag{3.37}$$

を得る．ここに現れた f_π および真空期待値はすべてカイラル極限の値であることに注意．この関係式 (3.37) は，（パイ中間子に関する）ゲルマン–オークス–レンナー (Gell-Mann-Oakes-Renner: GOR) 関係式 [30] と呼ばれる．

同様にして，ケイ中間子に対する GOR 関係式は

$$f_K^2 m_K^2 = -(\hat{m} + m_s)\langle 0|\frac{\bar{u}u + \bar{d}d}{2} + \bar{s}s|0\rangle \tag{3.38}$$

となる [16]．

3.4 軸性異常

3 フレーバーのカイラル極限でひとまず軸性異常がない場合を考える．この場合，QCD は $G = \mathrm{U}(3)_L \otimes \mathrm{U}(3)_R$ 不変性を持つ．カイラル対称性の自発的破れにより，真空の対称性は以下のように落ちる：

$$\begin{aligned}\mathrm{U}(3)_L \otimes \mathrm{U}(3)_R \simeq\ & \mathrm{U}(1)_V \otimes \mathrm{U}(1)_A \otimes \mathrm{SU}(3)_L \otimes \mathrm{SU}(3)_R \\ & \to \mathrm{U}(1)_V \otimes \mathrm{SU}(3)_V. \end{aligned} \tag{3.39}$$

すなわち，$H \simeq \mathrm{U}(1)_V \otimes \mathrm{SU}(3)_V$ である．G および H の生成子の数はそれぞれ $2 \times (8+1) = 18$ と $1+8=9$ であるから，南部–ゴールドストーンの定理により，$18-9=9$ 個の擬スカラーのゼロ質量中間子が存在することになる．実際は，ゲルマン–オークス–レンナー関係式が教えるように，カレントクォーク質量の存在のためにそれらは小さい質量を獲得するであろう．そこで，表 1.3 を見ながら低質量の擬スカラー中間子の数を数えてみよう：$\pi(140)$，K(500) そして η 中間子 (550) の数を加えると，

$$3+2\times 2+1 = 8 \neq 9$$

となり，1 個足りない．次に大きい質量の擬スカラー中間子は η' 中間子であるが，その質量は約 960MeV/c^2 と格段に大きい．カレントクォーク質量の効果で南部–ゴールドストーン粒子がここまで大きい質量が獲得できるであろうか？

しかし，質量よりも不思議なのはそのクォーク組成である．そのことを理解するために，まず，ベクトル中間子，ω および ϕ 中間子，のクォーク組成を見てみよう．表 1.3 から分かるように，これらの粒子内では u，d クォークと s クォーク成分の混合がない．このことを，フレーバー SU(3) 基底で考えて「**理想混合**(ideal mixing)」と呼ぶ．また，このことはベクトル中間子のセクターでは大久保–飯塚–ツヴァイク則 (**OZI 則**) [31]*8) がよく成立していることを意味する．同様に，OZI 則を仮定して，η と η' はそれぞれ，$\eta \sim \bar{u}u + \bar{d}d$，$\eta' \sim \bar{s}s$ となると期待できるが，実際はそれぞれ $\mathrm{SU}(3)_V$ 表現の 8 重項成分 η_8 と 1 重項成分 η_0 が支配的であることが分かっている（表 1.3 参照）．すなわち，OZI 則が擬スカラーの η-η' 系では大きく破れているのである．実は，アイソスピン対称性も破れている場合，軸性異常がないとすると，π^0-η-η' 系でも OZI 則がよく成り立ち，しかも，η の質量 m_η は以下の不等式を満たすことが示される [28]：

$$m_\eta \leq \sqrt{3}\, m_\pi. \tag{3.40}$$

これは，実験値 $M_\eta \sim 550$ MeV から大きくかけ離れている．

---

*8) 量子遷移過程をクォーク線で表したとき，クォーク線がヘアピン型になってつながらない行列要素は抑制されているという経験則 [32]．

この問題への定性的な解答は，軸性異常 (3.10) の存在と QCD 真空がいわゆる θ 真空になっていることにより得られる*9)．すなわち，軸性異常のためにカイラル極限でもフレーバー 1 重項の軸性カレントの保存則が破れる．そのために，カイラル W-T 関係式 (3.17) は $\mathrm{U}(1)_A$ カレントの場合，

$$2N_F \frac{g^2}{32\pi^2} F^a_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}_a(x) \bar{q} i\gamma_5 q(x') \tag{3.41}$$

という項が付け加わる．さらに，インスタントン [6],[28] と呼ばれるグルーオンの配位により，真空はいわゆる θ 真空 $|\theta\rangle$ になっているため，(3.41) の真空期待値が有限になる：

$$\langle\theta| 2N_F \frac{g^2}{32\pi^2} F^a_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}_a(x) \bar{q} i\gamma_5 q(x') |\theta\rangle \neq 0.$$

したがって，南部–ゴールドストーンの定理が適用できないので，ゼロ質量モードの存在が帰結されない．定量的には 1 重項の軸性カレントに結合する 1 重項擬スカラー成分 η_0 の質量が大きく跳ね上がるので，η_0-η_8 混合が抑制され，実験値の質量スペクトルが実現していると考えられる．

このことの意味することは，QCD の低エネルギーの有効理論には $\mathrm{U}(1)_A$ 対称性のあらわな破れを記述する項が存在しないといけない，ということである．トホーフト ('t Hooft) によって 1976 年に導出されたインスタントンに誘起されるクォーク間相互作用が行列式型の相互作用になることが示された [33]．これより以前の 1970 年，小林と益川は $\mathrm{SU}(3)_L \times \mathrm{SU}(3)_R$ カイラル対称性と η-η' 混合の問題をゲルマン–オークス–レンナー関係式および南部–ヨナラシニオ模型で考察し，η' の大きな質量を説明するためにはクォーク間有効相互作用として行列式型の 6 体フェルミ相互作用の存在が必要であることを指摘していた [34]．これについての少し詳しい説明は後述する．

*9) この問題（しばしば $\mathrm{U}(1)_A$ 問題と呼ばれる）の解決法の明快な解説はワインバーグあるいは藤川の教科書 [28], [29] に見ることができる．ただし，m_η や $\eta \to 3\pi$ 崩壊を説明する問題は $m_u \neq m_d$ によるアイソスピン対称性の破れの問題を伴っていることに注意する．

第 4 章
軸性異常項を含む線型シグマ模型

この章では，クォーク場の双線型場をボソン場で近似した線型シグマ模型を導入し，その場合の取り扱いを紹介する．

4.1 $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$-線型シグマ模型

ハドロンのクォーク構造が「見えない」ほどの十分低エネルギー（長波長）のスケールではクォークの複合場 $(\mathbf{\Phi})_{ij}(x) = \Phi_{ij}(x)$ をスカラー場 $\phi_{ij}(x)$ として記述する近似が妥当となるであろう*1)．すなわち，$\phi(x)$ は (2.143) に対応して，$U(3)_L \otimes U(3)_R$ 変換のもとで以下のように変換されるスカラー場である：

$$\phi \rightarrow L\,\phi\,R^{\dagger}. \tag{4.1}$$

このとき，$\phi(x)$ について 4 次までの項で構成される $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$-不変なラグランジアンは[35], [36]

$$\mathcal{L}_{\sigma}^{(0)} = \frac{1}{2}(\mathrm{Tr}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi) - \frac{1}{2}\mu^2\,\mathrm{Tr}(\phi\phi^\dagger) - \lambda\,[\mathrm{Tr}(\phi\phi^\dagger)]^2 - \gamma\,\mathrm{Tr}(\phi\phi^\dagger)^2 + \tau\,(\det\phi + \det\phi^\dagger). \tag{4.2}$$

である．係数 τ が軸性異常の強さを表していることに注意する．真空の安定性から，$\lambda, \gamma, > 0$ に取る．また，物理的な要請から $\tau > 0$ でなければならない．μ^2 の符号によってカイラル対称性の自発的破れの有無の場合分けをする．

有限のクォーク質量による対称性を破る効果を最小限に取り入れた項として次のものを考える：

$$\mathcal{L}_{\mathrm{SB}} = -\mathrm{Tr}\left[(\epsilon_0\lambda_0 + \epsilon_8\lambda_8)(\phi + \mathrm{h.c.})\right]/2\sqrt{2}. \tag{4.3}$$

ここで，h.c. はエルミート共役の略記である．ϵ_0 および ϵ_8 はカレントクォー

*1) 行列と行列成分を区別して，$\phi_{ij} = (\boldsymbol{\phi})_{ij}$ と書くべきであろうが，文字の節約のために，同じ記号を使う．

ク質量の線型結合に比例している：

$$\epsilon_0 \propto \sqrt{2/3}\cdot(m_u+m_d+m_s), \quad \epsilon_8 \propto \sqrt{1/3}\cdot(m_u+m_d-2m_s).$$

ただし，アイソスピン対称性を仮定した．全ラグランジアンは

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}_\sigma^{(0)}+\mathcal{L}_{\rm SB}. \tag{4.4}$$

以下での便利のため次の量を導入する：

$$c=(\sqrt{2}\epsilon_0+\epsilon_8)/2\sqrt{6}, \quad d=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\epsilon_8. \tag{4.5}$$

4.2 真空の決定：古典近似

場 ϕ の真空期待値を

$$\langle\phi\rangle_0=\bar{\phi}=\mathrm{diag}(\sigma_u,\sigma_u,\sigma_s) \tag{4.6}$$

と書くと，$\sigma_{u,s}$ は，古典近似では，真空のエネルギー

$$\langle-\mathcal{L}\rangle\equiv V(\sigma_u,\,\sigma_s), \tag{4.7}$$

の停留条件から定まる．$\sigma_{u,s}$ は実定数と仮定する．このとき，

$$\langle\mathcal{L}_{\rm SB}\rangle=-4c\sigma_u-2(c+d)\sigma_s,$$

に注意すると，簡単な計算で

$$\begin{aligned}V(\sigma_u,\,\sigma_s)= \;& 2(2\lambda+\gamma)\sigma_u^4+(\lambda+\gamma)\sigma_s^4+4\lambda\sigma_u^2\sigma_s^2\\ &-2\tau\sigma_u^2\sigma_s+\frac{\mu^2}{2}\cdot(2\sigma_u^2+\sigma_s^2)\\ &+4c\sigma_u+2(c+d)\sigma_s.\end{aligned} \tag{4.8}$$

$V(0,\,0)=0$ に注意する．

停留条件は，

$$\frac{\partial V(\sigma_u,\,\sigma_s)}{\partial\sigma_u}=0, \quad \frac{\partial V(\sigma_u,\,\sigma_s)}{\partial\sigma_s}=0,$$

これらの条件から σ_u, σ_s に対する次の方程式を得る：

$$\sigma_u\left[-\mu^2/2-2\lambda(2\sigma_u^2+\sigma_s^2)-2\gamma\sigma_u^2+\tau\sigma_s\right]=c, \tag{4.9}$$

$$\sigma_s\left[-\mu^2/2-2\lambda(2\sigma_u^2+\sigma_s^2)-2\gamma\sigma_s^2\right]+\tau\sigma_u^2=c+d. \tag{4.10}$$

後者よりも (4.9) と (4.10) の両辺を足し合わせて得られる以下の条件式の方が便利である：

$$(\sigma_u+\sigma_s)[-\mu^2/2-2\lambda(2\sigma_u^2+\sigma_s^2)-2\gamma(\sigma_u^2-\sigma_u\sigma_s+\sigma_s^2)+\tau\sigma_u]=2c+d. \tag{4.11}$$

簡単な場合として，カイラル極限（$c=d=0$）のときを考えてみる．このときには $\sigma_u=\sigma_s\equiv\sigma_0$ であるから，上の停留条件は次の 1 つの式になる：

$$\sigma_0\,[-\mu^2/2-6\lambda\sigma_0^2-2\gamma\sigma_0^2+\tau\sigma_0]=0.$$

この 3 次方程式は $\sigma_0=0$ と $\sigma_0\neq 0$ の解を持つ．後者は

$$\mu^2+4(3\lambda+\gamma)\sigma_0^2-2\tau\sigma_0=0 \tag{4.12}$$

より得られる．$\mu^2<0$ のときには，この 2 次方程式は次の解を持つ：

$$\sigma_0=\frac{\tau\pm\sqrt{-4\mu^2(3\lambda+\gamma)+\tau^2}}{4(3\lambda+\gamma)}.$$

この 2 つの実数解のうち正のものを σ_M と書こう．このとき，(4.8) に与えられる真空のエネルギーを計算すると，

$$V(\sigma_M,\sigma_M)\;<\;0 \tag{4.13}$$

となるので，$\sigma_0=0$ ではなく，$\sigma_0=\sigma_M$ の状態が真空状態であることが分かる．

[問い] (4.12) を用いて，(4.13) を示せ．

以下では，$\mu^2<0$ を仮定して，カイラル極限を離れた場合 ($c\neq 0, d\neq 0$) も $\sigma_{u,s}>0$ に取る．

4.3 中間子スペクトラム

さて，真空が決まったので，この真空の上の励起スペクトルを求めてみよう．そのため，場 ϕ を真空期待値 $\bar{\phi}$ と「揺らぎ」ϕ' に分解する：

$$\phi=\bar{\phi}+\phi'.$$

さらに，エルミートなスカラー場 S と擬スカラー場 P を用いて

$$\phi'\;=(S+iP)/\sqrt{2}=\sum_{\alpha=0}^{8}(S_\alpha+iP_\alpha)\lambda_\alpha/\sqrt{2}, \tag{4.14}$$

$$S^\dagger\;=S=\sum_{\alpha=0}^{8}S_\alpha\lambda_\alpha,\quad P^\dagger=P=\sum_{\alpha=0}^{8}P_\alpha\lambda_\alpha, \tag{4.15}$$

と表す．このように表現された ϕ を $\mathcal{L}$ に代入し，ϕ' について 2 次の項を取り出して励起モードの質量を求める：スカラー中間子および擬スカラー中間子の

各質量 $m^2_{S\alpha}$ および $m^2_{P\alpha}$ はそれぞれ $-\frac{1}{2}S^2_\alpha$ および $-\frac{1}{2}P^2_\alpha$ の係数として与えられる．

さてここで，3×3 行列式で表される軸性異常項の計算に便利な恒等式を導入しておく．すなわち，任意の 3×3 行列 M に対して次の恒等式が成り立つ：

$$\det M = \frac{1}{3}\mathrm{Tr}M^3 - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}M^2 \cdot \mathrm{Tr}M + \frac{1}{6}(\mathrm{Tr}M)^3. \tag{4.16}$$

[証明] これは線型代数でおなじみのケーリー–ハミルトンの定理を用いると簡単に証明できる．M に対する特性方程式を $f_M(x)$ と書こう：$\det(M-xI) \equiv f_M(x)$．このとき，ケーリー–ハミルトンの定理より，

$$0 = f_M(M).$$

さて，N を M の随伴行列とすると（$\sum_j N_{ij}M_{jk} = \delta_{ik}\det M$），

$$f_A(x) = -x^3 + \mathrm{Tr}M \cdot x^2 - \mathrm{Tr}N \cdot x + \det M.$$

ところが，

$$\mathrm{Tr}N = \frac{1}{2}\left[(\mathrm{Tr}M)^2 - \mathrm{Tr}M^2\right].$$

したがって，ケーリー–ハミルトンの定理から次の等式が得られる：

$$f_A(Mx) = -M^3 + \mathrm{Tr}M \cdot M^2 - \frac{1}{2}\left[(\mathrm{Tr}M)^2 - \mathrm{Tr}M^2\right] \cdot M + \det M\mathbf{1} = 0.$$

このトレースを取ると，(4.16) が得られる．□

まず，カイラル極限の場合を見てみる．この場合，フレーバー SU(3) によって分類できるので，8 重項と 1 重項に質量が分離するだけである．ここでは，擬スカラー中間子の場合のみを取り上げる．パイ（π^+, π^-, π^0），ケイ（$K^+, K^-, K^0, \bar{K}^0$）およびイータ中間子（η_8）が 8 重項を成す．それらの質量の 2 乗は

$$m^2_{P8} = \mu^2 + 4(3\lambda + \gamma)\sigma_0^2 - 2\tau\sigma_0 = 0. \tag{4.17}$$

第 2 の等式でカイラル極限での真空期待値を決める条件 (4.12) を用いた．すなわち，擬スカラーの 8 重項は質量が消え，南部–ゴールドストーンボソンになっている．

一方，1 重項の擬スカラー η_0 の質量の 2 乗は，同じく (4.12) を用いると，

$$m^2_{P0} = \mu^2 + 4(3\lambda + \gamma)\sigma_0^2 + 4\tau\sigma_0 = 6\tau\sigma_0 > 0 \tag{4.18}$$

となり，有限になる．係数 τ はラグランジアンの軸性異常項の係数であることを思い出そう．すなわち，η_0 の質量はカイラル極限でも軸性異常のために有限になることが分かる．

ここで重要な注意をする．η_0，したがって，物理的な η' が南部–ゴールドストーンボソンでないのは，軸性異常の存在（$\tau \neq 0$）のためであるが，(4.18) の教えるところによれば，獲得される質量は軸性異常の大きさ τ だけではなく，カイラル相転移の秩序変数 σ_0 にも比例していることである．したがって，有限温度あるいは有限密度系でカイラル対称性が部分的に回復している場合 ($\sigma_0 \to 0$) には，η' の質量も減少することが期待できる．

カイラル極限を離れて，クォーク質量が有限の場合 ($c \neq 0, d \neq 0$) を見てみよう．パイ，ケイ中間子の質量の 2 乗は以下のように求まる：

$$
\begin{aligned}
m_\pi^2 &= \mu^2 + 4\lambda(2\sigma_u^2 + \sigma_s^2) + 4\gamma\sigma_u^2 - 2\tau\sigma_s \\
&= -\frac{2c}{\sigma_u},
\end{aligned} \tag{4.19}
$$

$$
\begin{aligned}
m_K^2 &= \mu^2 + 4\lambda(2\sigma_u^2 + \sigma_s^2) + 4\gamma(\sigma_u^2 - \sigma_u\sigma_s + \sigma_s^2) - 2\tau\sigma_u \\
&= -\frac{2(2c+d)}{\sigma_u + \sigma_s}.
\end{aligned} \tag{4.20}
$$

ここで，第 2 の等号に移る際それぞれ (4.9) および (4.11) を用いた．c と d はラグランジアンに含まれていた対称性のあらわな破れの度合を表現していたことに注意しよう．このように,（カレントクォーク質量による）カイラル対称性のあらわな破れのために，カイラル極限ではゼロ質量であったパイ中間子とケイ中間子は質量を獲得する．これは，ゲルマン–オークス–レンナー関係式 (3.37) が教えるところのことでもあった．また，u クォークよりも s クォークのカレントクォーク質量が大きいので，$m_\pi < m_K$ となっている．

フレーバーに依存するカレントクォーク質量の存在はさらに，フレーバー SU(3) の 8 重項と 1 重項の混合を引き起こす．そのため，η と η' はそれぞれ純粋な 8 重項あるいは 1 重項の状態ではなくなる．この系の質量項を

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}(m_{P88}^2\eta_8^2 + 2m_{P80}^2\eta_8\eta_0 + m_{P00}^2\eta_0^2) \\
&\quad = -\frac{1}{2}(\eta_8,\, \eta_0)\begin{pmatrix} m_{P88}^2 & m_{P80}^2 \\ m_{P80}^2 & m_{P00}^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta_8 \\ \eta_0 \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{4.21}
$$

と表すと，

$$
\begin{aligned}
m_{P88}^2 &= \mu^2 + 4\lambda(2\sigma_u^2 + \sigma_s^2) + \frac{4}{3}\gamma(\sigma_u^2 + 2\sigma_s^2) \\
&\quad -\frac{2\tau}{3}(4\sigma_u - \sigma_s),
\end{aligned} \tag{4.22}
$$

$$
\begin{aligned}
m_{P00}^2 &= \mu^2 + 4\lambda(2\sigma_u^2 + \sigma_s^2) + \frac{4}{3}\gamma(2\sigma_u^2 + \sigma_s^2) \\
&\quad +\frac{4\tau}{3}(2\sigma_u + \sigma_s),
\end{aligned} \tag{4.23}
$$

$$
m_{P80}^2 = -\frac{4\sqrt{2}}{3}\gamma(\sigma_s^2 - \sigma_u^2) + \frac{2\sqrt{2}}{3}\tau(\sigma_s - \sigma_u), \tag{4.24}
$$

となる．この質量行列を対角化すれば，η-η' 系の質量と混合率が定まる．しか

し，この質量行列は少し複雑なので，ここではいくつかの極限的な状況を考え，η-η' 系の質量が決まる物理的背景を見ることに留めよう．

最初にフレーバー対称性は破れている $(d \neq 0)$ が軸性異常が存在しない $(\tau = 0)$ 場合の η_8-η_0 系の質量を議論しよう．$\tau = 0$ の場合，(4.22)-(4.24) は以下の式に簡単化される：

$$m^2_{P88} = \mu^2 + 4\lambda(2\sigma_u^2 + \sigma_s^2) + \frac{4}{3}\gamma(\sigma_u^2 + 2\sigma_s^2), \tag{4.25}$$

$$m^2_{P00} = \mu^2 + 4\lambda(2\sigma_u^2 + \sigma_s^2) + \frac{4}{3}\gamma(2\sigma_u^2 + \sigma_s^2), \tag{4.26}$$

$$m^2_{P80} = -\frac{4\sqrt{2}}{3}\gamma(\sigma_s^2 - \sigma_u^2). \tag{4.27}$$

このとき，

$$m^2_{P88} - m^2_{P00} = \frac{4}{3}\gamma(\sigma_s^2 - \sigma_u^2) > 0$$

に注意しよう．したがって，非対角項 m^2_{P80} の存在により，レベル反発が起こるが，η_0 を主成分とする η' の方が 8 重項を主成分とする η よりも必ず質量が小さくなる：実際，質量項を対角化すると，質量の固有状態 $\eta_\mp$ はそれぞれ

$$\eta_- = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}\eta_0 + \eta_8) \quad \eta_+ = \frac{1}{\sqrt{3}}(\eta_0 - \sqrt{2}\eta_8) \tag{4.28}$$

となる．これより，η_- （η_+）が η' （η）に対応することが分かる．ところが，対応する質量はそれぞれ，

$$m^2_{\eta_-} = \mu^2 + 4\lambda(2\sigma_u^2 + \sigma_s^2) + 4\gamma\sigma_u^2 = m_\pi^2, \tag{4.29}$$

$$m^2_{\eta_+} = \mu^2 + 4\lambda(2\sigma_u^2 + \sigma_s^2) + 4\gamma\sigma_s^2 = m_\pi^2 + 4\gamma(\sigma_s^2 - \sigma_u^2), \tag{4.30}$$

となり，実験値と逆である．このことは 1 重項の質量が大きくなるためには何らかの効果（軸性異常）が必要であることを示唆している．

ちなみに，$m^2_{\eta_-} = m^2_\pi$ となる理由はそのクォーク成分を見ると明らかになる：実際，

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{2}{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}), \quad \eta_8 = \sqrt{\frac{1}{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}),$$

と書くと，

$$\eta_{\eta_-} \propto \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d}), \quad \eta_{\eta_+} \propto s\bar{s}$$

となり，η_- のクォーク成分は u, d クォークだけであり，パイ中間子と同じになる．一方，η_+ は s クォークだけからなる．s クォークの方が u, d クォークより構成子質量が大きいので η_+ の方が η_- よりも重くなるのは自然であると理解できる．

このように，軸性異常項がなければ η-η' 系は理想混合になり，u, d クォーク

だけからなる η_- の方が s クォークだけからなる η_+ よりも質量が小さくなる．

次にその軸性異常は存在する $(\tau \neq 0)$ がフレーバー対称性は保たれている $(d=0)$ 場合の η_8-η_0 系の質量を議論しよう．この場合，非対角項は $m^2_{P80}=0$ であり，各対角項は

$$m^2_{P88} = \mu^2 + 4(3\lambda+\gamma)\sigma_0^2 - 2\tau\sigma_0 = \frac{-2c}{\sigma_0}, \tag{4.31}$$

$$m^2_{P00} = \mu^2 + 4(3\lambda+\gamma)\sigma_0^2 + 4\tau\sigma_0 = \frac{-2c}{\sigma_0} + 6\tau\sigma_0 > m^2_{P88}, \tag{4.32}$$

となる．確かにこの場合軸性異常のために 1 重項の擬スカラー中間子の方が 8 重項より重くなる．

4.4 部分的に保存される軸性カレント

2 章 2.4 節で紹介したゲルマン–レヴィによる処方で軸性カレントのダイバージェンスを求めてみよう．

まず，1 重項以外の軸性カレントの第 k 成分を $j^k_{5\mu}$ $(k \neq 0)$ と書くと，

$$\partial^\mu j^k_{5\mu} = -(\epsilon_0\, d_{0kj} + \epsilon_8\, d_{8kj})\phi_j. \tag{4.33}$$

右辺の SU(3) の構造定数 d_{abc} は (2.138) に与えられている．(4.33) の右辺がカイラル対称性のあらわな小さい破れのパラメーター $\epsilon_{0,8}$ に比例していることに注意しよう．この項がなければ軸性カレントは保存カレントになっている．すなわち，(4.33) は軸性カレントが部分的に保存されていることを表現している．そのため，(4.33) は PCAC(Partially Conserved Axial Current) の関係式と呼ばれる．

PCAC をもう少し詳しく見てみる．たとえば，π^+ 中間子と K^+ 中間子のチャンネルのカレントはそれぞれ，

$$j^\pi_{5\mu} = 1/\sqrt{2}\cdot(j^1_{5\mu} + i\, j^2_{5\mu}), \quad j^K_{5\mu} = 1/\sqrt{2}\cdot(j^4_{5\mu} + i\, j^5_{5\mu}),$$

となるので，そのダイバージェンスはそれぞれ

$$\partial^\mu j^\pi_{5\mu} = -\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\epsilon_0 + \sqrt{\frac{1}{3}}\epsilon_8\right)\phi_\pi = -2\sqrt{2}c\phi_\pi \equiv m^2_\pi f_\pi \phi_\pi, \tag{4.34}$$

$$\partial^\mu j^K_{5\mu} = -\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\epsilon_0 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}\epsilon_8\right)\phi_K = -2\sqrt{2}\left(c + \frac{1}{2}d\right)\phi_K \equiv m^2_K f_K \phi_K. \tag{4.35}$$

ここで，(4.19) と (4.20) にそれぞれ与えられているパイ中間子とケイ中間子の質量を代入すると，パイ中間子およびケイ中間子崩壊定数が以下のように求まる：

$$f_\pi = \sqrt{2}\sigma_u, \quad f_K = \sqrt{2}\frac{1}{2}(\sigma_u + \sigma_s). \tag{4.36}$$

その比は

$$\frac{f_K}{f_\pi} = 1 + \frac{\sigma_s - \sigma_u}{2\sigma_u} > 1 \tag{4.37}$$

となる．実験的には f_K の方が f_π より 20 パーセント程大きい．これは，$\langle \bar{s}s \rangle / \langle \bar{u}u \rangle > 1$ であることに対応する．この比が QCD 和則[*2)]など連続的な局所場理論としての QCD から導かれたものと逆になっていることに注意しよう．この逆転は，ここでの値はたとえば格子 QCD などで計られるものと同様クォーク凝縮体の絶対値であり，QCD 和則から導かれる真空期待値は正規積 $:\bar{q}q:$ の期待値であることから理解可能である[*3)]：直観的にはカレントクォーク部分を含む QCD の非摂動部分が与える真空期待値が差っ引かれている量である．s クォークのカレントクォーク質量 m_s は $m_{u,d}$ よりも 25 倍ほど大きいので差っ引く量が大きく，そのため上記のような逆転現象が起こると理解される．

同様にして，1 重項の軸性カレントのダイバージェンスを求めると，

$$\partial^\mu j^0_{5\mu} = 6i\tau(\det\phi - \det\phi^\dagger) - i\mathrm{Tr}[(\epsilon_0\,\lambda_0 + \epsilon_8\,\lambda_8)(\phi - \phi^\dagger)]/\sqrt{2} \tag{4.38}$$

となる．右辺に軸性異常項が寄与していることに注意しよう．したがって，$\epsilon_{0,8} = 0$ のカイラル極限でも 1 重項の軸性カレントは保存カレントにならない．

[問い] (4.38) の右辺第 2 項を導出せよ．

4.5 スカラー中間子のスペクトル

今使っている線型シグマ模型では，擬スカラー中間子とともにそのカイラルパートナーと呼ばれるスカラー中間子のスペクトルについても予言する．$SU(2)_L \times SU(2)_R \simeq O(4)$ 模型では，アイソスピン 1 重項のスカラー中間子 σ はパイ中間子とともに O(4) の基本表現を構成していたのであった．ストレンジネスの自由度まで含めた $N_F = 3$ の場合は，擬スカラーの場合と同様 9 重項を構成する．アイソスピン 1 重項はフレーバー SU(3) の 1 重項 σ_0 と 8 重項 σ_8 に分かれる．さらに，$m_s > m_{u,d}$ のために σ_0 と σ_8 は混合するので，アイソスピン 1 重項のスカラー中間子の質量パートは以下のように書かれる：

$$\mathcal{L}^S_{0,8} \equiv -\frac{1}{2}(\sigma_8, \sigma_0)\begin{pmatrix} m^2_{S88} & m^2_{S80} \\ m^2_{S80} & m^2_{S00} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_8 \\ \sigma_0 \end{pmatrix}. \tag{4.39}$$

---

*2) L. J. Reinders, H. R. Rubinstein and S. Yazaki, Phys. Lett. B **120** (1983) 209 [Erratum-ibid. B **122** (1983) 487; Phys. Rept. **127** (1985) 1].

*3) T. Hatsuda and T. Kunihiro, Phys. Lett. B **198** (1987) 126.

ここに，

$$
\begin{aligned}
m_{S88}^2 = &\ \mu^2 + \frac{4\lambda}{3}(10\sigma_u^2 - 8\sigma_u\sigma_s + 7\sigma_s^2) + 4\gamma(\sigma_u^2 + 2\sigma_s^2) + \frac{2\tau}{3}(4\sigma_u - \sigma_s), \\
m_{S00}^2 = &\ \mu^2 + \frac{4\lambda}{3}(14\sigma_u^2 + 8\sigma_u\sigma_s + 5\sigma_s^2) + 4\gamma(2\sigma_u^2 + \sigma_s^2) - \frac{4\tau}{3}(2\sigma_u + \sigma_s), \\
m_{S80}^2 = &\ \frac{8\sqrt{2}\lambda}{3}(2\sigma_u^2 - \sigma_u\sigma_s - \sigma_s^2) + 4\sqrt{2}\gamma(\sigma_u^2 - \sigma_s^2) + \frac{2\sqrt{2}\tau}{3}(\sigma_u - \sigma_s).
\end{aligned}
\tag{4.40}
$$

さらに，パイ中間子およびケイ中間子に対応するスカラー中間子はそれぞれ $a_0(980)$（かつては $\boldsymbol{\delta}$）および κ 中間子と呼ばれる．それぞれ，アイソスピン 3 重項および 2 重項である．この線型模型ではそれらの質量は以下のように与えられる：

$$
\begin{aligned}
m_\delta^2 = &\ \mu^2 + 4\lambda(2\sigma_u^2 + \sigma_s^2) + 12\gamma\sigma_u^2 + 2\tau\sigma_s, \\
m_\kappa^2 = &\ \mu^2 + 4\lambda(2\sigma_u^2 + \sigma_s^2) + 4\gamma(\sigma_u^2 + \sigma_u\sigma_s + \sigma_s^2) + 2\tau\sigma_u.
\end{aligned}
\tag{4.41}
$$

スカラー中間子はカイラル場 ϕ の真空期待値 σ_u, σ_s の周りの量子揺らぎに対応するボソンであり，電弱理論（ワインバーグ–サラム模型）におけるヒッグス粒子に対応する：ヒッグス場 ϕ_H の真空期待値がカレントクォーク質量および電子やミュー粒子の質量を与える．ここでのスカラー場の期待値が残り 90 パーセント以上の現実の物質の質量の起源となっている．このようにハドロン物理学におけるスカラー粒子の存在とその性質の解明は強い相互作用の真空の構造と物質の質量の起源に密接に結びついており現代物理学の重要な課題として活発に研究されている．ここで扱った $\mathrm{SU}(3)_L \otimes \mathrm{SU}(3)_R$ 線型シグマ模型によるスカラー中間子の研究については長い歴史がある：初期の研究としては [35] を参照．また，最近の解析としては，たとえば，文献 [37] がある．スカラー中間子については，後の章でも取り上げる．

第 5 章 QCDのカイラル有効模型としてのNJL模型

秩序変数が1個のスカラー場ではなく，複合場として表現される場合のカイラル対称性の自発的破れ（この場合,「動的対称性の破れ」と呼び，前者と区別する場合がある）を理解するにはその概念を最初に導入した南部–ヨナラシニオ（NJL）模型で考察するのが最も分かりやすくかつ教育的である．さらに，この模型はQCDの強結合展開や1-グルーオン交換（OGE）ポテンシャルのフィールツ変換[1]により，あるいは，インスタントンにより誘起されるクォーク間低エネルギー相互作用として導出される[38]．QCDの低エネルギー有効模型としてのNJL模型の意義については文献[38], [39]において詳しく議論されているのでここではこれ以上立ち入らない．

5.1 NJL模型の基礎

5.1.1 ディラック方程式の新しい見方

ここでは，カイラリティの概念の出現が自然に理解できる方法でディラック方程式を導き，NJL模型への自然な動機付けを与える．

まず，質量 m，スピン 1/2 を持つ非相対論的な粒子の2成分波動関数

$$\phi = \begin{pmatrix} \varphi_\uparrow(\boldsymbol{r}) \\ \varphi_\downarrow(\boldsymbol{r}) \end{pmatrix}$$

に作用する（自由）ハミルトニアンは

$$H_0 = \frac{1}{2m}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}) = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}\mathbf{1}_2, \tag{5.1}$$

と書けることから出発する．ここで，$\boldsymbol{\sigma}$ はパウリのスピン行列，$\boldsymbol{p} = -i\boldsymbol{\nabla}$ は運動量演算子である．ここでは，自然単位系（$\hbar = c = 1$）を取っている．この粒子の電荷を q とすると，電磁場 $A^\mu = (A_0, \boldsymbol{A})$ と相互作用している場合のハミルトニアン $H_{\rm Pauli}$ は次の置き換えで得られる：

$$H_0 \to H_{\mathrm{Pauli}} - qA_0, \quad \boldsymbol{p} \to \boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A}.$$

すなわち,

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{Pauli}} = \ & \frac{1}{2m}\{\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A})\}^2 + qA_0 \\ = \ & \frac{1}{2m}(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A})^2 \\ & + \frac{i}{2m}\boldsymbol{\sigma}\cdot((\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A})\times(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A})) + qA_0. \end{aligned} \tag{5.2}$$

この第 2 項は磁場 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}$ とスピン $\boldsymbol{\sigma}/2$ の結合項 $-(q/2m)\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}$ を与える．したがってスピンに伴う磁気モーメントが $2\frac{q}{2m}$ であり，いわゆる g 因子が $g = 2$ となることが分かる[*1)]．

[問い] (5.2) の第 2 項が $-(q/2m)\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}$ となることを示せ．

相対論への拡張を行おう．相対論的なエネルギー関係式 $E^2 - \boldsymbol{p}^2 = m^2$ の左辺を因数分解した式に

$$E \to i\partial/\partial t \equiv i\partial_0, \quad \boldsymbol{p} \to -i\boldsymbol{\nabla},$$

を代入して，

$$(i\partial_0 + \boldsymbol{\sigma}\cdot i\boldsymbol{\nabla})(i\partial_0 - \boldsymbol{\sigma}\cdot i\boldsymbol{\nabla})\phi = m^2\phi \tag{5.3}$$

を得る．ここで，ϕ は上で導入した 2 成分波動関数である．これを改めて $\psi_L \equiv \phi$ と書き，$\psi_R \equiv \frac{1}{m}(i\partial_0 - i\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nabla})\phi$ と定義すると，次の連立方程式が得られる．

$$\begin{aligned} (i\partial_0 + i\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla)\psi_R &= m\psi_L, \\ (i\partial_0 - i\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla)\psi_L &= m\psi_R. \end{aligned} \tag{5.4}$$

実は，これはディラック方程式に他ならない．実際，$\psi_\pm \equiv \psi_R \pm \psi_L$ を用いて，

$$\psi \equiv \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}$$

を定義すると，(5.4) から 4 成分スピナー ψ の従う次のディラック方程式となる：

$$(i\gamma\cdot\partial - m)\psi = 0 \tag{5.5}$$

$P_{R/L} \equiv (1 \pm \gamma_5)/2$ はそれぞれカイラリティ± 1 の状態への射影演算子であった：

---

*1) 相対論に依らないこの g 因子の導出は以下の教科書に紹介されている：J. J. Sakurai, Advanced Quantum Mechanics, Addison Wesley, 1967.

$$P_R\,\psi = \begin{pmatrix}\psi_R\\0\end{pmatrix}, \quad P_L\,\psi = \begin{pmatrix}0\\\psi_L\end{pmatrix}.$$

γ_5 を対角化する表示をワイル表示と呼ぶ．さて，(5.4) において，$\psi_{L,R} \sim \mathrm{e}^{-iEt+i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}$ を代入すると，

$$\begin{aligned} E\psi_R &= \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\psi_R + m\psi_L, \\ E\psi_L &= -\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\psi_L + m\psi_R, \end{aligned} \tag{5.6}$$

を得る．(5.6) より，エネルギー固有値は $E = \pm\sqrt{p^2+m^2}$ となることが分かる．特に $m = 0$ のときを考えると，カイラリティの固有状態 $\psi_{R,L}$ がエネルギーの固有状態になっている．実際，このときのラグランジアン密度は，

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi} i\gamma\cdot\partial\psi$$

であり，このラグランジアンは位相変換 $\psi \to \mathrm{e}^{i\alpha/2}\psi$ だけでなく，カイラル変換 $\psi \to \mathrm{e}^{i\gamma_5\beta/2}\psi$ に対して不変になっている．そして，(5.6) は正エネルギー解（$E = |\boldsymbol{p}| \equiv p$）ではヘリシティ演算子 $\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}/p$ を用いて，

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}/p)P_R\psi = +P_R\psi, \quad (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}/p)P_L\psi = -P_L\psi$$

となる．すなわち，質量のない自由場の理論においてはカイラリティとヘリシティが一致する．質量 m が存在すると，カイラリティ ± 1 の状態が混合し，もはやカイラリティのよい固有状態ではなくなるのである．

以下では，ディラック場で記述される粒子をクォークと呼び，ψ の代わりに q と書くことにする．カイラル不変性を破るディラック場の質量項はローレンツスカラー $\bar{q}q \equiv \sigma$ である．実際，1 フレーバーのカイラル変換に対して

$$\sigma = \bar{q}q \;\to\; \bar{q}\mathrm{e}^{i\gamma_5\beta}q = \cos\beta\bar{q}q + \sin\beta\bar{q}i\gamma_5 q,$$

と変換され，擬スカラー項 $\bar{q}i\gamma_5 q \equiv \pi$ と混合し，不変ではない．一方，ここに現れた擬スカラー項 π は次のように変換される：

$$\pi = \bar{q}i\gamma_5 q \;\to\; -\sin\beta\bar{q}q + \cos\beta\bar{q}i\gamma_5 q.$$

すなわち，カイラル変換は (σ, π) で張られる 2 次元平面の回転と同型であることが分かる．したがって，ベクトルの大きさの 2 乗

$$\sigma^2 + \pi^2 = (\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5 q)^2$$

はカイラル変換に対して不変である．このようにして，相互作用項を持つカイラル不変な最も簡単なラグランジアンとして次の南部–ヨナラシニオ（NJL）模型に至る：

$$\mathcal{L} = \bar{q}i\gamma\cdot\partial q \quad - (-g)[(\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5 q)^2]$$
$$= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1. \tag{5.7}$$

クォークと反クォークの間には引力が働くので，結合定数 g は正 $g > 0$ でなければならない．結合定数 g は $[\mathrm{mass}]^{-2}$ の次元を持っていて，くりこみ可能ではない．クォーク場にカラー自由度を付与し，

$$(\bar{q}q)^2 \equiv \left(\sum_{a=1}^{N_C} \bar{q}^a q^a\right)^2$$

とする．ただし，N_C はカラーの自由度の数である．後に説明するように，この理論はエネルギースケール 1GeV あたりでの QCD のカイラル有効理論とみなすことができ，くりこみ可能である必要はない．

5.1.2 平均場近似

ワイル表示を用いると (5.7) のラグランジアンの相互作用項は

$$\mathcal{L}_1 = 4g\,(\bar{q}_R q_L)\,(\bar{q}_L q_R) \tag{5.8}$$

と書けることに注意する．ここに，$q_{R(L)}$ は右巻き（左巻き）クォーク場である．

さて，QCD 真空におけるカイラル対称性の自発的な破れと金属の超伝導体への相転移[40],[41] の間には強い類似性がある．真空におけるカイラル対称性の自発的破れにおいて，金属の超伝導体での電子のエネルギースペクトルのギャップの起源であるスピンアップ，ダウンの電子が形成する凝縮体 $\langle\psi_\uparrow^{(e)}\psi_\downarrow^{(e)}\rangle$（およびその複素共役）に対応するのは同じカイラリティを持ったクォークと反クォークの対が作る凝縮体 $\langle\bar{q}_R q_L\rangle = 1/2\cdot(\langle\bar{q}q\rangle + i\langle\bar{q}i\gamma_5 q\rangle)$，および $\langle\bar{q}_L q_R\rangle = \langle\bar{q}_R q_L\rangle^*$ であり，この平均場が実効的なクォークの質量 $M \sim \langle\bar{q}q\rangle$ を与えることになる．逆に，$\langle\bar{q}q\rangle = \langle\bar{q}_R q_L\rangle + \mathrm{c.c.}$ および $\langle\bar{q}i\gamma_5 q\rangle = -i(\langle\bar{q}_R q_L\rangle - \mathrm{c.c.})$，と書ける．もし，真空がパリティのよい状態ならば，$\langle\bar{q}i\gamma_5 q\rangle = 0$ である．クォーク質量項の存在しないこの（カイラル極限の）理論模型の範囲では，パリティが保存されなければならない強い理由はなく*2)，一般には $\langle\bar{q}i\gamma_5 q\rangle \neq 0$，となる．

超伝導のボゴリューボフ–バラティン理論[40]~[42] にならって，自己無撞着平均場近似で (5.7) の真空（基底状態）を決定しよう．$|\,\rangle$ をこの理論の真空状態とし，この状態について平均場近似をする（$\langle\bar{q}q\rangle \equiv -m_0^2\sigma/G$，$\langle\bar{q}i\gamma_5 q\rangle \equiv -m_0^2\pi/G$）：

$$\mathcal{L}_{\mathrm{MFA}} = \bar{q}[i\gamma\cdot\partial - G(\sigma + i\pi\gamma_5)]q - \frac{m_0^2}{2}(\sigma^2 + \pi^2). \tag{5.9}$$

ただし，

$$2g = (G/m_0)^2 \tag{5.10}$$

---

*2) QCD そのものの場合は事情が異なることはヴァファ–ウィッテンの定理として述べた．

と置いた．最後の c 数の項は相互作用の 2 重の数え上げを避けるために必要である．このことは多体問題における平均場理論ではよく知られている[41]．$\mathcal{L}_{\text{MFA}}$ から導かれる運動方程式は，

$$[i\gamma\cdot\partial - G(\sigma + i\pi\gamma_5)]q = 0. \tag{5.11}$$

これをワイル表示で考えてみよう．ワイル表示では，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{MFA}} = & \sum_{\alpha=L,R}[\bar{q}_\alpha\gamma\cdot\partial q_\alpha] + 4g[\langle\bar{q}_R q_L\rangle\bar{q}_R q_L + \bar{q}_R q_L\langle\bar{q}_R q_L\rangle] \\ & -4g|\langle\bar{q}_R q_L\rangle|^2 \end{aligned}\tag{5.12}$$

となる．したがって，図 5.1 に表したように，クォークは平均場 $\langle\bar{q}_R q_L\rangle$（および $\langle\bar{q}_L q_R\rangle$）の効果でカイラリティ$\pm1$（$L$，$R$ で表示）の状態が混合することになる．

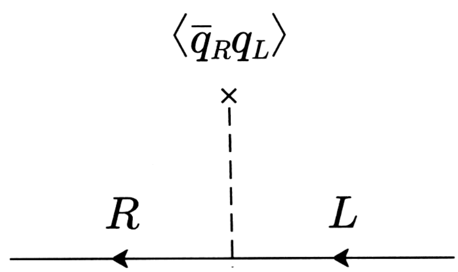


図 5.1　真空凝縮体 $\langle\bar{q}_R q_L\rangle$ の存在のために，カイラリティ±1（L，R で表示）の状態が混合し，ハミルトニアンを対角化する状態はカイラリティの固有状態になっていない．

ここで，$G\sqrt{\sigma^2+\pi^2} = M, \pi/\sigma = \tan\theta$，と M と θ を定義し

$$q_\theta = \mathrm{e}^{i\gamma_5\theta/2}q$$

と書くと，$\mathcal{L}_{\text{MFA}}$ に対応するハミルトニアンは

$$H_{\text{MFA}} = \int d^3\boldsymbol{x}\left\{\bar{q}_\theta(x)(-i\gamma\cdot\nabla + \ M)q_\theta(x) + \ \frac{m_0^2}{2}\sigma_0^2\right\} \tag{5.13}$$

である．q_θ に対する方程式は質量 M を持つ相対論的粒子に対する通常のディラック方程式になる：$(i\gamma\cdot\partial - M)q_\theta = 0$.

2.6 節に示しているように，我々はこの方程式の答えを知っている：

$$q_\theta(x) \ = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{p},r=\pm}\sqrt{\frac{M}{E_p}}\{a_{M}(\boldsymbol{p},r)u_{M}(\boldsymbol{p},r)\mathrm{e}^{-ip\cdot x} + b_{M}^\dagger(\boldsymbol{p},r)v_{M}(\boldsymbol{p},r)\mathrm{e}^{ip\cdot x}\}, \tag{5.14}$$

である．ここに r はヘリシティ，そしてクォークのエネルギーは $E_p = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + M^2}$ と与えられる．ディラック質量

$$M = -g\langle \bar{q}_\theta q_\theta \rangle$$

が超伝導におけるエネルギーギャップに対応することは明らかであろう．

ここで，質量のあるスピノル $u_M(\boldsymbol{p}, r)$ と $v_M(\boldsymbol{p}, r)$ に対し，

$$\bar{u}_M(\boldsymbol{p}, r) u_M(\boldsymbol{p}, r) > 0 \quad \bar{v}_M(\boldsymbol{p}, r) v_M(\boldsymbol{p}, r) < 0$$

であることに注意する．すなわち，正エネルギー解はスカラー密度が正であり，負エネルギー解は負である．後に見るように，この符号の違いが有限温度や密度でカイラル対称性が回復する起源である．

以下では次の規格化条件を採用する：

$$\bar{u}_M(\boldsymbol{p}, r) u_M(\boldsymbol{p}, r) = 1, \quad \bar{v}_M(\boldsymbol{p}, r) v_M(\boldsymbol{p}, r) = -1. \tag{5.15}$$

$q_\theta(x)$ に対するディラック方程式を初期条件

$$x_0 = 0 : \, q_\theta(x) = q_0(x),$$

のもとで解くと超伝導との類似性がより明白になる．ただし，$q_0(x)$ は質量 0 のときのディラック場である．$q_\theta(x)$ を質量 0 のスピノルで展開すると，

$$q_\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\boldsymbol{p}, s=R,L} \left\{ a_{\boldsymbol{p}}^{(s)}(t) u_0(\boldsymbol{p}, s) \mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} + b_{\boldsymbol{p}}^{(s)\dagger}(t) v_0(\boldsymbol{p}, s) \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} \right\} \tag{5.16}$$

となる．ただし，s はヘリシティ，R, L は手系を表す．

ハミルトニアン H_{MFA} は質量無しの演算子 $(a_{\boldsymbol{p}}^{(s)}(t), b_{\boldsymbol{p}}^{(s)}(t))$ または，質量有りの演算子 $(a_M(p, s), b_M(p, s))$ を用いて次のように表すことができる：

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{MFA}} = & \sum_{\boldsymbol{p}, s} \left\{ |\boldsymbol{p}| \left(a_{\boldsymbol{p}}^{(s)\dagger}(t) a_{\boldsymbol{p}}^{(s)}(t) - b_{-\boldsymbol{p}}^{(s)}(t) b_{-\boldsymbol{p}}^{(s)\dagger}(t) \right) \right. \\ & \left. + M \left(a_{\boldsymbol{p}}^{(s)}(t) b_{-\boldsymbol{p}}^{(s)\dagger}(t) + \mathrm{h.c.} \right) \right\} + V \frac{m_0^2}{2} \sigma_0^2 \\ = & \sum_{\boldsymbol{p}, r} E_p \left(a_M^\dagger(\boldsymbol{p}, r) a_M(\boldsymbol{p}, r) - b_M(\boldsymbol{p}, r) b_M^\dagger(\boldsymbol{p}, r) \right) + V \frac{m_0^2}{2} \sigma_0^2. \end{aligned} \tag{5.17}$$

これより，質量有りの演算子はハミルトニアンを対角化するが，質量無しの演算子は対角化しないことが分かる．ハイゼンベルグ方程式は質量無し演算子を用いて次のように書ける：

$$i \begin{pmatrix} \dot{a}_{\boldsymbol{p}}^{(s)}(t) \\ \dot{b}_{-\boldsymbol{p}}^{(s)\dagger}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\boldsymbol{p}| & M \\ M & -|\boldsymbol{p}| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\boldsymbol{p}}^{(s)}(t) \\ b_{-\boldsymbol{p}}^{(s)\dagger}(t) \end{pmatrix}. \tag{5.18}$$

ただし，初期条件は $a_{\boldsymbol{p}}^{(s)}(t=0)=a_{M=0}(\boldsymbol{p},s)$.

この方程式を解くことにより，質量有りと無しの演算子はボゴリューボフ–バラティン変換で結びつけられることが示される：

$$a_M(\boldsymbol{p},r) = \cos\frac{\theta_{\boldsymbol{p}}}{2}\cdot a_0(\boldsymbol{p},r) + \sin\frac{\theta_{\boldsymbol{p}}}{2}\cdot b_0^\dagger(-\boldsymbol{p},r), \tag{5.19}$$
$$b_M^\dagger(-\boldsymbol{p},r) = -\sin\frac{\theta_{\boldsymbol{p}}}{2}\cdot a_0(\boldsymbol{p},r) + \cos\frac{\theta_{\boldsymbol{p}}}{2}\cdot b_0^\dagger(-\boldsymbol{p},r).$$

ただし，

$$\cos\theta_{\boldsymbol{p}} = |\boldsymbol{p}|/E_p, \quad \sin\theta_{\boldsymbol{p}} = M/E_p.$$

ボゴリューボフ–バラティン変換はユニタリー演算子 $\mathcal{U}(p,r)$ を用いて次のように表すことができる;

$$\begin{pmatrix} a_M(\boldsymbol{p},r) \\ b_M^\dagger(-\boldsymbol{p},r) \end{pmatrix} = \mathcal{U}(\boldsymbol{p},r)\begin{pmatrix} a_0(\boldsymbol{p},r) \\ b_0^\dagger(-\boldsymbol{p},r) \end{pmatrix}\mathcal{U}^\dagger(\boldsymbol{p},r), \tag{5.20}$$

ここに，

$$\mathcal{U}(\boldsymbol{p},r) = \exp\left\{-\frac{\theta_{\boldsymbol{p}}}{2}\left(a_0^\dagger(\boldsymbol{p},r)b_0^\dagger(-\boldsymbol{p},r) - \text{h.c.}\right)\right\}. \tag{5.21}$$

質量有りと質量無しの演算子の真空をそれぞれ $|\sigma_0\rangle$ および $|0\rangle$ と書くことにしよう：

$$a_M(\boldsymbol{p},r)|\sigma_0\rangle = b_M(\boldsymbol{p},r)|\sigma_0\rangle = 0, \tag{5.22}$$
$$a_0(\boldsymbol{p},r)|0\rangle = b_0(\boldsymbol{p},r)|0\rangle = 0. \tag{5.23}$$

さて，質量有り演算子 $a_M^\dagger(\boldsymbol{p},+1)$ 中の質量無し演算子 $a_0^\dagger(\boldsymbol{p},R)$ $(b_0(-\boldsymbol{p},R))$ はカイラリティを $+1$ だけ生成 (消滅) させる．一方，$a_0^\dagger(\boldsymbol{p},R)$ と $b_0(-\boldsymbol{p},R)$ は両方ともヘリシティを 1 だけ生成する．したがって，$a_M^\dagger(\boldsymbol{p},+1)$ により生成された状態はヘリシティの固有状態であるが，カイラリティの固有状態ではない．同様に，1 だけヘリシティを消す演算子 $b_M^\dagger(-\boldsymbol{p},+1)$ は定まったカイラリティを持っていない．こうして，$\prod_{\boldsymbol{p},r} U(\boldsymbol{p},r)$ を $|0\rangle$ に作用させると定まったヘリシティを持つがカイラリティの固有状態ではない状態が作られる；すなわち，$|\sigma_0\rangle$ においては**カイラル対称性が自発的に破れている．**

5.1.3 真空の決定：無限に縮退した真空

スカラー密度の真空期待値 $\langle\bar{q}_\theta q_\theta\rangle$ は (2.78) を用いて次のように計算できる：

$$\begin{aligned} -(2g)^{-1}M = \langle\bar{q}_\theta q_\theta\rangle &= -iN_c \lim_{y\to x+} \mathrm{Tr}S_F(x-y;M) \\ &= -iN_c\mathrm{Tr}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{1}{\gamma\cdot p - M} \\ &= 2N_c\int_{|\boldsymbol{p}|<\Lambda}\frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\frac{-M}{\sqrt{M^2+\boldsymbol{p}^2}}. \end{aligned} \tag{5.24}$$

ここで，Tr はカラーとスピンについて取られる．物理を見やすくするために最後の等式で 3 次元運動量表示をした．Λ は 3 次元カットオフである．

ここでいくつか教育的と考えられるコメントをする．

1. 最後の等式において，M をギャップ Δ で置き換えれば，上の式は超伝導の BCS 理論における基礎方程式，ギャップ方程式と同じ形になっていることが分かる [40], [41]．
2. ここで導入した 3 次元カットオフ Λ はディラック場のフーリエ展開のカットを与えるものと同一である：

$$
\begin{aligned}
q_\theta(x) = & \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{r=\pm 1,\ |\boldsymbol{p}|<\Lambda} \sqrt{\frac{M}{E_p}} \\
& \times [a(\boldsymbol{p},r)u(\boldsymbol{p},r)\mathrm{e}^{-ip\cdot x} + b^\dagger(\boldsymbol{p},r)v(\boldsymbol{p},r)\mathrm{e}^{ip\cdot x}].
\end{aligned} \tag{5.25}
$$

実際，演算子形式で $\langle \bar{q}_\theta q_\theta \rangle = \langle \sigma_0 | \bar{q} q | \sigma_0 \rangle$ を計算すれば，

$$
\begin{aligned}
\langle \bar{q}_\theta q_\theta \rangle = & \frac{N_c}{V} \sum_{r,|\boldsymbol{p}|<\Lambda} \frac{M}{E_p} \bar{v}_M(\boldsymbol{p},r) v_M(\boldsymbol{p},r) \\
= & -\frac{2N_c}{V} \sum_{|\boldsymbol{p}|<\Lambda} \frac{M}{E_p}.
\end{aligned} \tag{5.26}
$$

ここで，$\bar{v}_M(\boldsymbol{p},r)v_M(\boldsymbol{p},r) = -1$ を用いた．賢明な読者は，期待値を取る状態が正エネルギーの粒子を含んでいるなら，$\bar{u}_M(\boldsymbol{p},r)u_M(\boldsymbol{p},r) = 1$ なのでその分カイラル凝縮体の絶対値が減少することを容易に見て取るであろう．

ギャップ方程式 (5.24) は常にトリビアルな解 $M = 0$ を持っている．そして，結合定数 g が次の「臨界値」，$g_c \equiv \frac{\pi^2}{N_C \Lambda^2}$，を越えると，有限の値を持った解 $M \neq 0$ も存在するようになる．実際，$M/\Lambda \neq 0$ が小さいとき，(5.24) は

$$
\frac{1}{\alpha_{\mathrm{NJL}}} = 1 - x^2 \ln\frac{1}{x} < 1, \quad (x = M/\Lambda)
$$

と近似できる．ただし，

$$
\alpha_{\mathrm{NJL}} \equiv \frac{g N_c \Lambda^2}{\pi^2} = \frac{g}{g_c}.
$$

これより，上の言明が正しいことが見て取れる．ただし，この議論は相転移が 2 次相転移のときのみ正しいことに注意する．

しかしながら，この新しい解と常に存在する $M = 0$ の解のどちらを取るべきかを決める説得的な議論はギャップ方程式だけからは得られない．どちらが選ばれるかは，対応する真空のエネルギーを比較して決定することができる．そのとき同時に相転移が 1 次か 2 次かも判明する．

真空のエネルギー $\mathcal{E}(\sigma_0)$ と $\mathcal{E}(0)$ を次のように定義しよう．

$$\mathcal{E}(\sigma_0) \equiv \langle \sigma_0 | H_{\mathrm{MFA}}(\sigma_0) | \sigma_0 \rangle / V, \tag{5.27}$$

$$\mathcal{E}(0) \equiv \langle 0 | H_{\mathrm{MFA}}(0) | 0 \rangle / V. \tag{5.28}$$

両者の差を $\mathcal{V}(\sigma_0)$ と書くと，$x = M/\Lambda$ として，

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} &\equiv \mathcal{E}(\sigma_0) - \mathcal{E}(0) \\
&= -\frac{2N_c}{V} \sum_{\boldsymbol{p}} \left(\sqrt{M^2 + p^2} - |\boldsymbol{p}| \right) + \frac{m_0^2}{2} \sigma_0^2 \Big|_{M = G\sigma_0} \\
&= -\frac{N_c \Lambda^4}{4\pi^2} \left\{ \left(1 + \frac{x^2}{2} \right) \sqrt{1 + x^2} - 1 - \frac{x^4}{2} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x} \right) \right\} + \frac{m_0^2 \sigma_0^2}{2}
\end{aligned} \tag{5.29}$$

となる．これは，ディラックの海による寄与と相互作用の 2 重数え上げを避ける斥力的な c 数項からなっている．ちなみに，この真空のエネルギー差は場の理論では「有効ポテンシャル (effective potential)」と呼ばれているもの [3] の 1 ループ近似による結果と等価である．実際，$\mathcal{V}$ は次のようにローレンツ不変な形に書くこともできる：

$$\mathcal{V} = i N_c \mathrm{Tr} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \ln \left(\frac{\gamma \cdot p - M + i\epsilon}{\gamma \cdot p + i\epsilon} \right) + \frac{m_0^2 \sigma_0^2}{2}. \tag{5.30}$$

このことは最初に p_0 で積分することにより，以下のように簡単に示すことができる．

$$\begin{aligned}
&-2 \int \frac{d^3 \boldsymbol{p}}{(2\pi)^3} (\sqrt{p^2 + M^2} - |\boldsymbol{p}|) = -2i \int \frac{d^3 \boldsymbol{p}}{(2\pi)^3} \int_0^{M^2} dm^2 \int \frac{dp_0}{2\pi} \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \\
&= -i \mathrm{Tr} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \int_0^M dm \frac{1}{\gamma \cdot p - m + i\epsilon} \\
&= i \mathrm{Tr} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \ln \left(\frac{\gamma \cdot p - M + i\epsilon}{\gamma \cdot p + i\epsilon} \right).
\end{aligned} \tag{5.31}$$

重要なことは，エネルギーが $\sigma^2 + \pi^2 = M^2/G^2$ の組み合わせのみに依存し，角度 θ に依存しない，ということである（図 5.2 参照）．これは，真空が連続無限に縮退していることを意味し，π 方向の回転モード，すなわち，擬スカラーのゼロ質量モードが出現する原因となる．

$\mathcal{V}$ を M の関数と見たとき，その停留点は $\partial \mathcal{V}/dM = 0$ の解として与えられる．一般性を失わないので $\theta = 0$ の場合を考えてみよう．有効ポテンシャルが $\sigma_0 = \sigma_M$ で停留する条件

$$\left. \frac{d\mathcal{V}}{d\sigma_0} \right|_{\sigma_0 = \sigma_M} = 0$$

はギャップ方程式 (5.24)，すなわち，自己無撞着に M を決める条件と一致することも容易に見て取れる．この方程式には g の値によらず自明な解 $M = 0$ がある．$g > g_c$ のとき上で示したように，もう 1 つの非自明な解

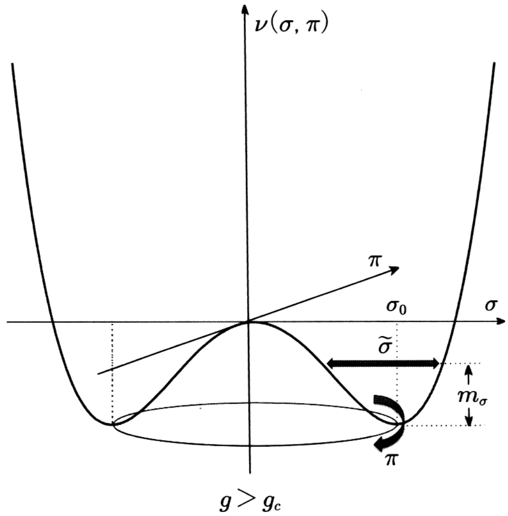


図 5.2 結合定数が臨界値より大きいときの真空のエネルギーの振る舞い．π の方向の回転に対して対称になっている．エネルギーの底にそって π 方向のモードを励起するのにエネルギーが必要ない．

$$M = M_0 = G\sigma_0 \neq 0$$

が現れる．二つの解に対応する真空のエネルギーを比較すると，$g > g_c$ のとき非自明解 M_0 に対応するエネルギーの方が低くなり，この状態 $|\sigma_0\rangle$ が真の基底状態，すなわち，真空である，ということになる．そして，この真空においてはカイラル対称性が自発的に破れていることは既に見た．

さて，$x = M/\Lambda$ が小さいとき，有効ポテンシャルは次のように近似できる：

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &\simeq -\frac{N_c\Lambda^4}{4\pi^2}x^2\left(\frac{\alpha_{\rm NJL}-1}{\alpha_{\rm NJL}} - \frac{x^2}{2}\ln\frac{1}{x}\right)_{x=M/\Lambda}\\ &\simeq -\frac{N_c\Lambda^4}{8\pi^2}\frac{\alpha_{\rm NJL}-1}{\alpha_{\rm NJL}}x^2. \end{aligned} \tag{5.32}$$

これより，$\alpha_{\rm NJL} > 1$ $(g > g_c)$ のとき，有限の M の解に対応する状態の方がより低いエネルギー状態であり，真の真空（基底状態）であることが分かる．

以上の近似式を用いた議論は相転移が 2 次相転移であることを仮定しているが，近似式を用いない（平均場近似の範囲で）厳密な計算でも結果は変らない．

以上は，カレント質量のないカイラル極限での話であった．実際には，クォークには有限の質量 m がある．QCD による相互作用により，その値はスケールによるが，1-2 GeV のスケールでは，u, d クォークの場合，数 MeV である．そのため，わずかながら（「ソフトに」）カイラル対称性はあらわに破れている．有効ラグランジアンとしての NJL 模型にも，（カレント）質量項

$$\mathcal{L}_{\rm SB} = -m\,\bar{q}q,$$

を付け加えなければならない．秩序変数を与える演算子 $\bar{q}q$ と線型に結合している m は磁性相転移における外磁場に対応する：$-\mathcal{L}_{\rm SB}$ はゼーマンエネルギーである．この項が質量項に加わるので質量に対する自己無撞着条件 (Self-consistency condition: SCC と略記する)，すなわち，ギャップ方程式は

$$M = -2g\langle\bar{q}q\rangle + m, \tag{5.33}$$

と変更される．右辺の真空凝縮体 $\langle\bar{q}q\rangle$ は質量 M を持ったクォーク場によるものである．したがって，具体的には，

$$\frac{m}{M} = 1 - 4gN_c\int_{|\boldsymbol{p}|<\Lambda}\frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{M^2+\boldsymbol{p}^2}}, \tag{5.34}$$

となる．ギャップ方程式 (5.33) は次のように書き直すことができる：

$$(M-m)/2g = -\langle\bar{q}q\rangle.$$

m と g を固定して，両辺を M の関数と見ると，左辺は x 切片が m，傾きが $1/g$ の直線である．一方，右辺は M の増加関数になっている*3)．したがって，結合定数 g が大きいほど，また，g が一定のとき，大きい m ほど，大きい M が解となる．

$m \neq 0$ の場合，有効ポテンシャルは

$$\mathcal{V}(\sigma_0) = \ -\frac{2N_c}{\Omega}\sum_{\boldsymbol{p}}(\sqrt{M^2+p^2}-\sqrt{m^2+p^2})|_{M=G\sigma_0+m} \ + \ m_0^2\sigma_0^2/2 \tag{5.35}$$

となる．この場合も $\mathcal{V}(\sigma_0)$ の停留条件はギャップ方程式 (5.34) に一致する．

5.1.4 励起モード

真空が定まったので，その真空上での励起モードを調べてみよう．真空はそのエネルギーの比較で決められた．真空のエネルギーは平均場近似の範囲で「有効ポテンシャル (effective potential)」として求められた．対称性の自発的破れがあるとき，特徴的な q-$\bar{q}$ から構成される集団励起モードが現われる．

この新しい真空と整合的な粒子描像を出発点とする全ラグランジアンは次のように表現できる：

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\rm MFA} + g : [(\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5 q)^2] : . \tag{5.36}$$

ここで，: : は新しい真空に対する正規積[3] である．最後の項は，多体問題の理論では「残留相互作用」と呼ばれるものである[41]．この項は対称性が破れた真空の上における素励起について重要な情報を含んでいる．実際，$\mathcal{L}_{\rm MFA}$ だけから作った軸性カレントは保存則を満たさない：

---

*3) これはカットオフの取り方による．後述．

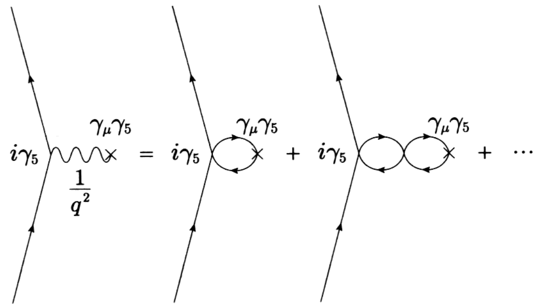


図 5.3 残留相互作用による量子効果により擬スカラーチャンネルにゼロ質量の集団モード（パイ中間子）が現れ，新たにクォークの軸性流行列要素に寄与する．$\gamma^\mu\gamma_5$ に比例する「裸」の項の他にこの項が付け加わる．

$$\partial_\mu j^{\mu 5} = 2M\bar{q}i\gamma_5 q.$$

しかし，残留相互作用の効果を取り入れると事情が異なり，保存則が回復され得る．たとえば，運動量 p と p' の 1 クォーク状態について $j_{\mu 5}$ の行列要素を取ると，一般には移行運動量の 2 乗 q^2 に依存する二つの形状因子 $F_A(q^2), F_P(q^2)$ を使って，

$$\langle p'|j_{\mu 5}|p\rangle = \bar{u}(p')[F_A(q^2)\gamma_\mu\gamma_5 + F_P(q^2)\gamma_5 q_\mu]u(p)$$

と書ける．ここで軸性カレントの保存則を用いると二つの形状因子の間に次の関係があることが分かる：

$$F_P(q^2) = -2MF_A(q^2)/q^2.$$

$F_A(0) \neq 0$ を仮定すると，残留相互作用の効果により質量 0，擬スカラーの励起状態が生まれることを示唆している．これは，ダイアグラムでは図 5.3 のようになっていることを意味する．

実際以下に示すように，擬スカラーチャンネルのクォーク-反クォーク励起モード（パイ中間子）の質量を計算すると，自己無撞着に M（したがって，真空）を決める条件 $M = -2\langle\bar{q}q\rangle$ のために，パイ中間子の質量がゼロになる．興味深いことは，パイ中間子がゼロ質量になる同じ条件でスカラーチャンネルの中間子モード（シグマ中間子と呼ぶ）の質量が

$$m_\sigma = 2M$$

となることである．したがって，

$$m_\pi \,:\, M \,:\, m_\sigma \,=\, 0 \,:\, 1 \,:\, 2 \tag{5.37}$$

の関係式（「南部関係式」）が成立する*4)．実際は，パイ中間子を作る実際の

*4) このボソンとフェルミオンの質量の関係を，南部は擬超対称性と呼んだ．

クォーク（u, d クォーク）はラグランジアンの段階で小さい質量を持っているので，パイ中間子は小さな質量～ 140 MeV を持つことになりこの関係式も少し変更を受ける．この $m_\sigma = 2M$ の関係については後でまた取り上げる．

このような複合粒子の励起モードを記述するにはいくつかの方法がある．南部–ヨナラシニオの原論文では南部–ベーテ–サルピータ方程式の方法が用いられた．経路積分による補助場の方法もよく用いられる．ここでは，多体理論でよく用いられる時間依存の平均場理論で扱ってみよう．これは，場の理論における補助場を用いた有効作用 (effective action) [3] の 1 ループ近似による評価 [20] と等価である．

まず，平均場 $\langle \bar{q}q \rangle \sim \sigma_0$ としての質量 M に対する自己無撞着条件 (5.33) は次の結合方程式と同値であることに注意しよう：

$$\begin{aligned} -m_0^2/G \cdot \sigma_0 &= -i\mathrm{Tr}\lim_{y\to x+} S_F(x-y;\sigma_0), \\ (i\gamma\cdot\partial_x - m - G\sigma_0)S_F(x-y;\sigma_0) &= \delta^4(x-y). \end{aligned} \tag{5.38}$$

このように書き直すと，平均場が時間と空間に依存する場合に拡張することができる．これは，多体問題の理論における時間依存ハートリー–フォック理論 (TDHF) の基本方程式である「径路の方程式」*5) をグリーン関数を用いて表したことになる．よく知られているように，平均場の揺らぎの振幅が小さい極限ではリング近似が導かれる．この手法を用いて，真空回りの平均場の揺らぎとしてパイ中間子とシグマ中間子の質量を求めてみよう．

時間-空間に依存するスカラー型平均場を

$$\langle \bar{q}(x)q(x) \rangle = -m_0^2/G \cdot \sigma(x),$$

と表す．さらに，$\sigma(x)$ を定数の真空期待値 $\sigma_0 \equiv \sigma_M$ と揺らぎの部分 $\sigma'(x)$ に分解する：

$$\sigma(x) = \sigma_M + \sigma'(x). \tag{5.39}$$

このとき，$\sigma(x)$ を自己無撞着に決める条件は (5.38) を拡張して以下のように表すことができる：

$$-m_0^2/G \cdot (\sigma_M + \sigma'(x)) = -i\mathrm{Tr}\lim_{y\to x+} S_F(x,y;[\sigma]). \tag{5.40}$$

ここで $S_F(x,y;[\sigma])$ は平均場 $\sigma(x)$ が存在するときのクォーク場のグリーン関数である：

$$[i\gamma\cdot\partial_x - M - G\sigma'(x)]S_F(x,y;[\sigma]) = \delta^4(x-y). \tag{5.41}$$

*5) たとえば，M.Yamamura and A. Kuriyama, Prog. Theor. Phys. Supplement **93** (1987),1 を参照．また，教科書 [43] の補章には TDHF から RPA の簡明な導出が与えられている．

このとき $S_F(x,y;[\sigma])$ は次の積分方程式を満たしている：

$$S_F(x,y;[\sigma]) \;= S_F(x-y;\sigma_M) + \int d^4z\, S_F(x-z;\sigma_M)G\sigma'(z)S_F(z,y;[\sigma]). \tag{5.42}$$

同様にして，真空回りの擬スカラー場の揺らぎ

$$\langle \bar{q}(x)i\gamma_5 q(x)\rangle \equiv -m_0^2/G\cdot\pi(x)$$

を考えることもできる．これはパイ中間子モードである*6)．このときの自己無撞着方程式は次の結合方程式で与えられる：

$$\begin{aligned} -m_0^2/G\cdot\pi(x) = &\; -i\mathrm{Tr}\lim_{y\to x+} i\gamma_5 S_F(x,y;[\pi]), \\ S_F(x,y;[\pi]) = &\; S_F(x-y;\sigma_M) \\ &+\int d^4z\, S_F(x-z;\sigma_M)Gi\gamma_5\pi(z)S_F(z,y;[\pi]). \end{aligned} \tag{5.43}$$

以下ではまず小振幅近似でパイ中間子の分散関係を求めてみよう．$\pi(x)$ について 1 次まで取ると，(5.43) は

$$\begin{aligned} \frac{-m_0^2}{G}\cdot\pi(x) \;\simeq\; & -i\lim_{y\to x+}\mathrm{Tr}\, i\gamma_5 \\ & \times\int d^4z\, S_F(x-z;\sigma_M)Gi\gamma_5\pi(z)S_F(z-y;\sigma_M), \end{aligned} \tag{5.44}$$

となる．フーリエ変換した場を次のように定義しよう．

$$\pi(x) = \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-ip\cdot x}\tilde{\pi}(p), \quad \sigma'(x) = \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-ip\cdot x}\tilde{\sigma}'(p). \tag{5.45}$$

すると，(5.44) は以下のように書ける：

$$D_\pi^{-1}(q^2)\tilde{\pi}(p) = 0. \tag{5.46}$$

ただし，

$$D_\pi^{-1}(q^2) \;=\; -m_0^2 - G^2\Pi^\pi(q^2), \tag{5.47}$$

$$\Pi^\pi(q^2) \;=\; \mathrm{Tr}\left[i\gamma_5(-i)\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{1}{\gamma\cdot p_- - M + i\epsilon}i\gamma_5\frac{1}{\gamma\cdot p_+ - M + i\epsilon}\right]. \tag{5.48}$$

ここで，$p_\pm \equiv p \pm q/2$，また，$D_\pi^{-1}(q^2)$ はリング近似でのパイ中間子モードの逆プロパゲーターである：第 1 項 $-m_0^2 \equiv {D_\pi^{(0)}}^{-1}(q^2)$ は補助場の方法で与えられるゼロ次の逆プロパゲーターであり，$\Pi^\pi(q^2)$ は擬スカラーチャンネルの分極

*6) アイソスピンの自由度は考えていない．

演算子である．

ループの計算はカットオフを導入してから具体的に行うことにする．しかし，結果だけを述べておく．真空に関する SCC(5.33) から，カイラル極限では $q^2 \equiv m_\pi^2 = 0$ となる．すなわち，擬スカラーチャンネルの励起モードはゼロ質量になる．

同様に，スカラーチャンネルの励起モード（シグマ中間子）の分散関係も求めることができる．(5.40) を $\sigma'(x)$ について線型近似をし，フーリエ変換をすると以下の方程式を得る：

$$D_\sigma^{-1}(q^2)\tilde{\sigma}'(p) = 0.$$

ここに，

$$D_\sigma^{-1}(q^2) \equiv -m_0^2 - G^2\Pi^\sigma(q^2), \tag{5.49}$$

$$\Pi^\sigma(q^2) = \mathrm{Tr}\left[-i\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{1}{\gamma\cdot p_- - M + i\epsilon}\frac{1}{\gamma\cdot p_+ - M + i\epsilon}\right]. \tag{5.50}$$

5.1.5 カットオフの取り方

低エネルギー有効模型はあるエネルギースケール以下でのみ物理的な意味を持ち，したがって，その理論の定義の中にカットオフを含む．さらに，真空が変化し粒子の質量が変化する問題を取り扱う場合は，系の自由度の数が一定になるようにカットオフの形式を取らなければならない．この場合，単純な 4 次元カットオフや固有時間カットオフの方法は必ずしも適当ではない．ここでは，NJL の原論文 [11] で採用されているように，与えられた外線のエネルギー・運動量に対しては発散しないことが知られている虚数部から出発して物理的に妥当な正準カットオフのスキームを採用する．そこでは，分散関係式を通して実部が定義される．QCD の低エネルギー有効模型として NJL 模型をとらえる場合，紫外カットオフは QCD の漸近自由性の近似的表現とみなすこともできる*7)．

パイ中間子チャンネルのループ積分の虚数部は以下のようにファインマン積分によって与えられる：

$$\mathrm{Im}\,\Pi^\pi(q^2) \;\; = \mathrm{Im}\left[N_c(-4i)\int_0^1 d\alpha\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{p^2 - M^2 - \alpha(1-\alpha)q^2}{[p^2 - M^2 + \alpha(1-\alpha)q^2 + i\epsilon]^2}\right]. \tag{5.51}$$

ここで，1 ループの虚数部は，本質的には，与えられた外線の q^μ からオンシェルのクォーク-反クォークへ崩壊する場合の位相空間の体積を与えるので有限であることに注意する．したがって，積分の値に変更を加えることなく積分変数

*7) QCD の有効模型として NJL 型模型を考える場合，特に，有限温度・密度への適用を考える場合のカットオフの取り方についてはこのテキストで採用されたもの以外のものも提案されている．たとえば，文献 [44] を参照のこと．

を自由にシフトさせることができる．標準的な計算[1],[3],[20]により，

$$\mathrm{Im}\,\Pi^{\pi}(q^2) = -\frac{N_c}{8\pi}\theta(q^2-4M^2)q^2\sqrt{1-\frac{4M^2}{q^2}}. \tag{5.52}$$

分散関係を用いて，結合定数と実部の積を次のように定義する：

$$2g\mathrm{Re}\,\Pi^{\pi}(q^2) = 2g\frac{\mathrm{P}}{\pi}\int_0^{\Lambda_4^2}\frac{\mathrm{Im}\,\Pi^{\pi}(q^2)}{q'^2-q^2}dq'^2, \tag{5.53}$$

$$= -2g\frac{N_c}{8\pi^2}\int_{4M^2}^{\Lambda_4^2}\frac{q'^2\sqrt{1-4M^2/q'^2}}{q'^2-q^2}dq'^2. \tag{5.54}$$

ここで，P は主値を取ることを意味する．

さて，NJL 模型は低エネルギー有効理論である：その妥当なエネルギーを Λ_4 以下であるとする．これは結合定数 g が次のように q^2 に依存すると仮定することにより表現することができる：

$$g = 0 \quad \text{for} \quad q^2 > \Lambda_4^2. \tag{5.55}$$

したがって，

$$2g\mathrm{Im}\,\Pi^{\pi}(q^2) = -2g\frac{N_c}{8\pi}\theta(\Lambda_4^2-q^2)\theta(q^2-4M^2)q^2\sqrt{1-\frac{4M^2}{q^2}}. \tag{5.56}$$

以下では，ループ積分にはいつもこのように q^2 に依存する結合定数が乗じられているものと仮定する．すると，実部はカットオフを用いて以下のように書ける：

$$2g\mathrm{Re}\,\Pi^{\pi}(q^2)$$
$$= \mathrm{Re}\left[N_c(-4i)\int_0^1 d\alpha\int^{\Lambda_4^2}\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{p^2-M^2-\alpha(1-\alpha)q^2}{[p^2-M^2+\alpha(1-\alpha)q^2+i\epsilon]^2}\right]. \tag{5.57}$$

これをファインマンカットオフの表式と呼ぶ．

さて，真空を決めた正準形式による表式との対応を付けるために以下の変数変換を行う：

$$q'^2 = 4(M^2+p^2).$$

対応してあらたなカットオフ Λ_3 を以下のように定義しよう：

$$\Lambda_4^2 = 4(M^2+\Lambda_3^2). \tag{5.58}$$

すると，

$$\mathrm{Re}\,\Pi^{\pi}(q^2) = \frac{-4N_c}{\pi^2}\mathrm{P}\int_0^{\Lambda_3}p^2dp\frac{E_p}{4E_p^2-q^2}. \quad E_p = \sqrt{M^2+p^2}. \tag{5.59}$$

このカットオフのスキームを正準カットオフスキームあるいは単に正準カット

オフと呼ぶ．

同様な計算で，スカラーチャンネルの分極演算子の虚部と実部はそれぞれ以下のように求まる：

$$\mathrm{Im}\,\Pi^{\sigma}(q^2) = -\frac{N_c}{8\pi}\theta(q^2-4M^2)q^2(1-4M^2/q^2)^{3/2}, \tag{5.60}$$

$$\mathrm{Re}\,\Pi^{\sigma}(q^2) = -\frac{4N_c}{\pi^2}\int_0^{\Lambda_3}\frac{p^2dp}{E_p}\frac{p^2}{4E_p^2-q^2}. \tag{5.61}$$

ところで，カイラル凝縮体 $\langle\bar{q}q\rangle$ の計算でもカットオフ Λ が必要であった．カットオフは有効模型を定義するものであるから，真空と励起状態で同じものであることが望ましい．ここで導入したカットオフスキームではそうなっていることが以下のようにして分かる．$\mathrm{Re}\,\Pi^{\sigma}(q^2)$ と $\mathrm{Re}\,\Pi^{\pi}(q^2)$ に対して以下の関係式が成り立つ：

$$\frac{d\langle\bar{q}q\rangle}{dM} = \mathrm{Re}\,\Pi^{\sigma}(0), \quad \Pi^{\pi}(0) = \frac{\langle\bar{q}q\rangle}{M}. \tag{5.62}$$

したがって，

$$\Lambda_3 = \Lambda,$$

という重要な結論が導かれる．

ここで参考のために，有限密度系の相転移の研究などで使われることの多い「固有時間カットオフ（proper-time regularization）」による表式についてみてみよう．カットオフエネルギーを Λ_r とすると，このカットオフスキームによるクォークの伝播関数は以下のように与えられる：

$$S_F(x) = (\gamma_\mu\partial^\mu - iM)\int_{1/\Lambda_r^2}\frac{d\tau}{4\pi^2}\frac{\exp\{x^2/4\tau-\tau(M^2-i\epsilon)\}}{\tau^2}. \tag{5.63}$$

したがって，クォーク凝縮体は

$$\langle\bar{q}q\rangle = -\frac{N_cM^3}{4\pi^2}\left[\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} - Ei(-x)\right]_{x=M^2/\Lambda_r^2}, \tag{5.64}$$

となる．ここで，$Ei(-x)$ は指数積分関数であり以下のように定義されている．

$$Ei(-x) = -\int_x^{\infty}dy\frac{\mathrm{e}^{-y}}{y}. \tag{5.65}$$

さて，正準カットオフを用いて $\langle\bar{q}q\rangle$ の M 依存性を計算してみると，その絶対値は M の単調増加関数になっていることが分かる．一方，ファインマン積分を用いた4-運動量カットオフや固有時間カットオフでは，このような単調増加性は得られず，途中で最大値を取った後，それより大きい M では減少に転ずる，という非物理的な結果が得られる．これは，上で注意したように Λ_4 の持つ非物理的な M 依存性のためである．カイラル凝縮体 $\langle\bar{q}q\rangle$ はギャップ方程式を通じてカレントクォーク質量 m にも依存している．格子 QCD の計算結

果[*8)]と少なくとも定性的に整合的な振る舞いを与えるのは正準カットオフだけである[*9)].

さらに，真空エネルギーの変分関数としての有効ポテンシャルをファインマンカットオフで計算すると，大きな M に対して無限に小さくなるという非物理的な振る舞いを示す．正準カットオフではそのような不都合は生じない[46]．したがって，以下では専ら正準カットオフを採用する．

5.1.6 カイラル極限でのパイおよびシグマ中間子の質量

カットオフの手法が定まったので集団励起モードとしてのパイおよびシグマ中間子の質量 m_π, m_σ を求めよう．パイおよびシグマチャンネルでの逆グリーン関数は以下のように書き直すことができる：

$$-D_\pi^{-1}(q^2)/m_0^2 = 1 - \frac{2gN_c}{\pi^2}\int_0^\Lambda \frac{p^2dp}{E_p}\left[1 - \frac{q^2}{q^2-4E_p^2}\right], \tag{5.66}$$

$$-D_\sigma^{-1}(q^2)/m_0^2 = 1 - \frac{2gN_c}{\pi^2}\int_0^\Lambda \frac{p^2dp}{E_p}\left[1 - \frac{q^2-4M^2}{q^2-4E_p^2}\right]. \tag{5.67}$$

ギャップ方程式 (5.24) を使うと，

$$D_\pi^{-1}(q^2=0)=0, \quad \text{および} \quad D_\sigma^{-1}(q^2=(2M)^2)=0 \tag{5.68}$$

を得る．よって，次の重要な結果を得る：

$$m_\pi = 0, \tag{5.69}$$

$$m_\sigma = 2M. \tag{5.70}$$

すなわち，パイ中間子はゼロ質量であり，南部–ゴールドストーンモードと同定される．一方，シグマ中間子の質量は同じ根拠で動的に生成されたクォーク質量のちょうど 2 倍になる[*10)].

(5.70) は次のような重大な内容を含んでいる．カイラル相転移が 2 次相転移か弱い 1 次相転移の場合，秩序変数 $\langle\bar{q}q\rangle$ に比例するクォーク質量 M は減少するので，シグマ中間子の質量も減少し，カイラル極限では臨界点でゼロになる．つまり,「素」粒子の質量が変化するのである．すなわち，シグマ中間子は秩序変数の振幅の揺らぎに対応するモードであり，臨界点付近で質量が小さくなる，という性質を持つ．こういう性質のモードは相転移のソフトモードと呼ばれている．シグマ中間子は，カイラル相転移の南部–ゴールドストーン相 (NG 相) におけるソフトモードである．一方，パイ中間子は臨界点までゼロ質量を保つ．

---

*8) D. Barkai, K. J. M. Moriarty and C. Rebbi, Phys. Lett. B **156** (1985) 385.

*9) 次元正則化はまったく非物理的な結果を与える[45].

*10) 線型シグマ模型は NJL 模型と同様，カイラル対称性の線型表現であるが，シグマ中間子の質量に対してこのような予言能力（逆に言うと，拘束）はない．これは，超伝導理論におけるギンズブルグ–ランダウ作用と BCS ハミルトニアンとの関係と同じである[41].

5.1.7 ウィグナー相でのカイラル相転移のソフトモード

上では，シグマ中間子が NG 相におけるカイラル相転移のソフトモードであることを見た．ここでは，ウィグナー相 $(g < g_c)$ でのソフトモードの存在を検討する．それはカイラル相転移の前駆現象を考える基礎となる．

ウィグナー相においては，カイラル極限ではカイラル不変性のために擬スカラーとスカラーチャンネルでのモードが縮退する．実際，この場合それぞれのチャンネルの自己エネルギー項は以下のように書ける：

$$\Pi^{\pi}(q^2) = \Pi^{\sigma}(q^2) = -\frac{N_c}{8\pi^2}\int_0^{\Lambda_4^2} \frac{q'^2 dq'}{q'^2 - q^2 - i\epsilon}. \tag{5.71}$$

$M = 0$ であるから $\Lambda_4 = 2\Lambda$ であることに注意．以下，両チャンネルを区別せず，スカラーチャンネルと呼ぶ．上半平面にある q^2 に対してこの積分は解析的であり，以下のように積分が実行できる：

$$\Pi^{\mathrm{s,ps}}(q^2 = m_s^2) = -\frac{N_c\Lambda_4^2}{8\pi^2}\left[1 + \frac{q^2}{4\Lambda^2}\mathrm{Log}\left(1 - \frac{4\Lambda^2}{q^2}\right)\right]. \tag{5.72}$$

ここで，Log は対数の主値を表す．この関数の下半面への解析接続は実軸上のカット $0 < q^2 = m_s^2 < 4\Lambda^2$ を超えて行うことができる．結果は，

$$\Pi^{\mathrm{s,ps}}(q^2) = -\frac{N_c\Lambda_4^2}{8\pi^2}\left[1 + \frac{q^2}{4\Lambda^2}\mathrm{Log}\left(1 - \frac{4\Lambda^2}{q^2}\right) + 2n\pi i\right] \tag{5.73}$$

となる．ここで，$n = 0, 1$ はそれぞれ第 1 および第 2 リーマン面への解析接続を表している．こうして，スカラーモードの分散式（質量）は以下の方程式の解として与えられる：

$$\frac{1-\alpha_{\mathrm{NJL}}}{\alpha_{\mathrm{NJL}}} = \frac{q^2}{4\Lambda^2}\mathrm{Log}\left(1 - \frac{4\Lambda^2}{q^2}\right) \quad \text{for} \quad \mathrm{Im}\, q^2 > 0, \tag{5.74}$$

$$= \frac{q^2}{4\Lambda^2}\left[\mathrm{Log}\left(1 - \frac{4\Lambda^2}{q^2}\right) + 2n\pi i\right] \quad \text{for} \quad \mathrm{Im}\, q^2 < 0. \tag{5.75}$$

下半面（第 2 リーマン面）の極が物理的な極である．臨界点付近では，解 $q^2/4\Lambda^2 \equiv x$ は小さいと予想されるので，x が小さいとして解の**実部**の近似的振る舞いを解析してみよう．このとき，

$$\frac{1-\alpha_{\mathrm{NJL}}}{\alpha_{\mathrm{NJL}}} = x \ln\left|\frac{1}{x}\right| \equiv \ell(x). \quad (\ell(-x) = -\ell(x).) \tag{5.76}$$

簡単に分かるように，$\ell(x)$ は領域 $-1/e < x < 1/e$ において単調増加関数である．したがって，分散式の実部は結合定数 α_{NJL} が増加して 1 に近づいていくとどんどん小さくなり，臨界点 $\alpha_{\mathrm{NJL}} = 1$ においてゼロになる．これは，ソフトモードの存在を示唆している．さらに，$\alpha_{\mathrm{NJL}} > 1$ のときには，$q^2 < 0$ となる，すなわち，タキオンモードとなり，系が不安定になることを示す．

近似に依らず数値的に複素ポールを求めると，$\mathrm{Re}\, q^2 > 0$ かつ $\mathrm{Im}\, q^2 < 0$ となる減衰モードが存在することが分かる．このポールは，α_{NJL} が増大して 1 に近づくにつれて複素平面上を動いて原点に近づく．すなわち，ソフト化し

ていく[46]：このソフトモードは秩序変数 $\langle(\bar{q}q)^2\rangle$ とそのカイラルパートナー $\langle(\bar{q}i\gamma_5 q)^2\rangle$ の揺らぎである．

秩序変数の揺らぎの増大を陽に見るには演算子 $O_{H\alpha}(x) \equiv: \bar{q}_H(x)\Gamma_\alpha q_H(x):$ をスペクトル分解してその強度 $S_\alpha(q^2)$ を計算すればよい：

$$S_\alpha(q^2) = \int d^4q \mathrm{e}^{iq\cdot x}\langle O_{H\alpha}(x)O_{H\alpha}(0)\rangle. \tag{5.77}$$

ここで，下付添え字 H はハイゼンベルグ演算子であることを示している．また，$\alpha = \sigma$ (π) に対して $\Gamma_\alpha = \mathbf{1}_4$ $(i\gamma_5)$．

揺動散逸定理より，強度関数（スペクトル関数[3],[41]）$S_\alpha(q)$ は分極関数 $\Pi^{\rm full}_\alpha(q^2)$ の虚数部と関係している：

$$\begin{aligned} S_\alpha(q) &= -2\mathrm{Im}\,\Pi^{\rm full}_\alpha(q), & (5.78)\\ \Pi^{\rm full}_\alpha(q) &= -i\int d^4q \mathrm{e}^{iq\cdot x}\langle TO_{H\alpha}(x)O_{H\alpha}(0)\rangle. & (5.79)\end{aligned}$$

応答関数[41] としての遅延グリーン関数[3],[41] $D^R_\alpha(q)$ はスペクトル密度 $\rho_\alpha(q)$ を用いて次のように表すことができる：

$$\begin{aligned} D^R_\alpha(q) &= -i\int d^4q \mathrm{e}^{iq\cdot x}\theta(t)\langle\{\hat{O}_{H\alpha}(x),\hat{O}_{H\alpha}(0)\}_+\rangle, & (5.80)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega'}{2\pi}\frac{\rho_\alpha(\omega',\mathbf{q})}{\omega-\omega'+i\epsilon}. & (5.81)\end{aligned}$$

すなわち，

$$S_\alpha(q^2) = \rho_\alpha(q). \tag{5.82}$$

これをスペクトル表示[3],[41] という．

リング近似で計算すると，

$$\Pi^{\rm full}_\sigma(q^2) = \frac{\Pi_\sigma(q^2)}{1+2g\Pi_\sigma(q^2)}, \tag{5.83}$$

を得る．したがって，この近似の下で，

$$S_\sigma(q^2) = \frac{-\mathrm{Im}\,\Pi_\sigma(q^2)}{(1+2g\mathrm{Re}\,\Pi_\sigma(q^2))^2+(2g\mathrm{Im}\,\Pi_\sigma(q^2))^2}. \tag{5.84}$$

ここに，実部と虚数部は以下のように書ける：

$$\begin{aligned} 1+2g\mathrm{Re}\,\Pi_\sigma(q^2) &= \alpha_{\rm NJL}\left\{\frac{1-\alpha_{\rm NJL}}{\alpha_{\rm NJL}} - \frac{q^2}{4\Lambda^2}\ln\left|1-\frac{4\Lambda^2}{q^2}\right|\right\}, & (5.85)\\ 2g\mathrm{Im}\,\Pi_\sigma(q^2) &= -\alpha_{\rm NJL}\pi\frac{q^2}{4\Lambda^2}. & (5.86)\end{aligned}$$

数値計算により，以下のことが分かる[47]：

1. 強度関数 $S_\sigma(q^2)$ はピーク構造を持ち，そのピークの位置と幅は上で求めたポールの実部と虚部に対応する．

2. 結合定数 α_{NJL} が臨界値（1）に近づくにつれ，ピークの位置は原点に近づいていき，幅が狭くなり鋭いピークになっていく．
3. このことは，臨界点付近ではよく定義された素励起がカイラル相転移の前駆的ソフトモードとして存在することを意味する．
4. 以上のことは，カイラル極限からはずれて $\hat{m} = 5.5$ MeV 程度の小さいカレントクォーク質量が存在する場合でも，定性的に変わらない[39]．

結合定数の代わりに，温度や密度など環境変数を変化させたときも同様である[48] ことは後の章で見ることにする．

5.2 2フレーバーの場合

QCD の有効模型として NJL 模型が有用であることをフレーバーの数が 2 の場合（$N_F = 2$）について見ることにする．具体的には，カレントクォーク質量を導入し，パイ中間子の質量とその崩壊定数 f_π を計算し，実験値と一致するように模型のパラメーター，結合定数 g とカットオフ Λ，を決定する．得られるカットオフは 4 次元カットオフに換算すると約 1.4 GeV となり，QCD スケールの有効理論となっていることが分かる．一度このように模型パラメーターが決められると，興味ある物理量が驚くほど実験値を再現することを見る．特に，当然のことではあるが，低エネルギー定理から得られる関係式，ゴールドバーガー–トリーマン[9] の関係式やゲルマン–オークス–レンナー関係式[30] が導出できることを見る．

2 フレーバーのときの NJL 模型として以下のものを採用する：

$$\mathcal{L} = \bar{q}(i\gamma\cdot\partial - \boldsymbol{m})q + g[(\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5\boldsymbol{\tau}q)^2], \tag{5.87}$$

$$= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1. \tag{5.88}$$

$\boldsymbol{m} = \text{diag}(m_u, m_d)$ はカレントクォーク質量行列であり，τ^i $(i = 1,2,3)$ はアイソスピンについてのパウリ行列である．

以下では，カレントクォークレベルでのアイソスピン対称性 $m_u = m_d$ を仮定する；$\hat{m} = (m_u + m_d)/2$ と書く．カレントクォーク質量はくりこみを受け，スケールに依存する．NJL 模型は 1-2GeV での有効模型と想定しているので，$\hat{m}$ =3-10 MeV である．ここでは，$\hat{m} \simeq 5.5$ MeV と取る．

実際には，$m_d/m_u \sim 2$ でありカレントクォークレベルでのアイソスピン対称性はひどく破れている．原子核やハドロンのレベルの現象でアイソスピンが良い量子数として機能している理由は $m_u \sim 3$ MeV と $m_d \sim 5$ MeV が Λ_{QCD} と比べて小さいので，カイラル $\text{SU}(2)_L \otimes \text{SU}(2)_R$ 対称性がよい近似で成り立ち，しかもこの対称性が自発的に破れることにより動的に生成される質量 M_{SSB} がカレントクォーク質量に比べて圧倒的に大きいからである．すなわち，**カイラル対称性とその自発的破れがハドロンの世界で（近似的に）実現しているアイ**

ソスピン対称性の起源である． そのことは同じく，$2m_s/(m_u+m_d) \simeq 25$ とその比が大きいにもかかわらず，ハドロンの世界ではフレーバー $\mathrm{SU}(3)_f$ が近似的にであれ妥当することの物理的起源にもなっている．

カレントクォーク質量項が無視できる場合，このラグランジアンは $\mathrm{SU}(2)_L \times \mathrm{SU}(2)_R$ の対称性を持っている．これは，2 章で見たように，軸性異常項を大きく取りすぎているが，軸性異常の効果はストレンジネスを含めた場合に重要になるので，その正当な取り扱いは 3 フレーバーの場合まで持ち越しとする．

前章と同様に，自己無撞着平均場近似を適用しよう．このとき，カイラル凝縮体 $\langle \bar{q}q \rangle$ には u, d 二つのクォークからの寄与があることに注意し計算すると，全質量 M に対する自己無撞着方程式（「ギャップ方程式」）は以下のようになることが分かる：

$$\frac{\hat{m}}{M} = 1 - 8gC \cdot \int_0^\Lambda \frac{p^2 dp}{E_p}. \tag{5.89}$$

ここで，$C \equiv N_c N_F / 4\pi^2$ と置いた．カレントクォーク質量 $\hat{m}$ があまり大きくなければ，結合定数 g が大きくなると，ギャップ方程式の解は 3 個になる．一つは極大に対応し，二つは極小に対応する．最小値の解を見つけるには，真空のエネルギーに代入して最小を与えるものを見つけなければならない．

一度真空が決まったならば，新しい真空の上での集団的励起状態としてのパイおよびシグマ中間子の質量をフレーバーの数が 1 のときと全く同様にして求めることができる．ただし，前章の表式において $N_c \to N_c N_F$ とする必要がある．ギャップ方程式を用いると，各質量を決定する方程式は以下のようになる：

$$\frac{\hat{m}}{M} = m_\pi^2 2gC \cdot F(M/\Lambda, m_\pi/2\Lambda), \tag{5.90}$$

$$\frac{\hat{m}}{M} = (m_\sigma^2 - 4M^2) 2gC \cdot F(M/\Lambda, m_\sigma/2\Lambda). \tag{5.91}$$

ただし，

$$F(a,b) = \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+a^2}} \frac{1}{x^2+a^2-b^2}. \tag{5.92}$$

有限のカレントクォーク質量のために，パイ中間子の質量はもはや 0 ではなく，小さいが有限になる．また，シグマも質量は $2M$ よりも少し大きくなり，連続状態に埋め込まれている．

5.2.1 いくつかの興味ある物理量と低エネルギー定理

ここでは，オンシェルの π-クォーク結合定数 $G_{\pi q}$ を求め，それからパイ中間子崩壊定数 f_π を求める．

5.2.1.1 π-, σ-クォーク結合定数

パイおよびシグマ中間子とクォークの結合定数を求めて見よう．我々の模型

では，これらの中間子はクォーク-反クォークの集団モード（複合粒子）であり，その伝播関数はリング近似では $D_\alpha(q^2)$ で与えられる．このことから，

$$\frac{G^2_{\alpha q}(q^2)}{q^2 - m^2_\alpha} = G^2 D_\alpha(q^2), \quad (\alpha = \pi, \sigma) \tag{5.93}$$

によって，運動量依存 α-クォーク結合定数 $G^2_{\alpha,q}(q^2)$ を定義しよう．ここに G は (5.10) で定義されている「裸の結合定数」である．このオンシェルでの値 ($q^2 = m^2_\alpha$ での値) は伝播関数 $D_\alpha(q^2)$ の $q^2 = m^2_\alpha$ での留数になる：

$$\begin{aligned} G^2_{\alpha q}(q^2 = m^2_\alpha) \equiv \ & G^2_{\alpha q} = G^2 \lim_{q^2 \to m^2_\alpha} (q^2 - m^2_\alpha) D_\alpha(q^2) \\ = \ & G^2 \left[\frac{d}{dq^2} D^{-1}_\alpha(q^2)|_{q^2 = m^2_\alpha} \right]^{-1}. \end{aligned} \tag{5.94}$$

π-クォークおよび σ-クォーク相互作用はこの $G_{\alpha q}$ を用いて，それぞれ

$$\mathcal{L}_{\pi q} = G_{\pi q} \bar{q}\, i\gamma_5 \boldsymbol{\tau}\, q \cdot \boldsymbol{\pi}, \tag{5.95}$$

$$\mathcal{L}_{\sigma q} = G_{\sigma q} \bar{q} q\, \sigma, \tag{5.96}$$

と書ける．

具体的表式を代入すると，オンシェルでの π-クォーク結合定数は

$$\begin{aligned} G^2_{\pi q} &= \frac{1}{C} \left[\int_0^\Lambda p^2 dp \frac{E_p}{(E^2_p - m^2_\pi/4)^2} \right]^{-1} \\ &= C \left[F(M/\Lambda, 0) + \frac{2}{3} \left(\frac{m_\pi}{2M} \right)^2 \frac{1}{(1 + M^2/\Lambda^2)^{3/2}} \right. \\ &\quad \left. + O\left(\left(\frac{m_\pi}{2M} \right)^4 \right) \right], \end{aligned} \tag{5.97}$$

となる．

5.2.1.2 パイ中間子崩壊定数

パイ中間子崩壊定数 f_π は次のように，アイソスピン 3 重項の軸性カレントによる 1 パイ中間子状態から真空への遷移行列要素として定義される：

$$\langle \sigma_M | \bar{q}(0) \gamma_\mu \gamma_5 \tau_\pm q(0) | \pi^\mp(q) \rangle = i\sqrt{2} f_\pi q_\mu. \tag{5.98}$$

ここで，$|\sigma_M\rangle$ は南部–ゴールドストーン相における真空であり，$|\pi^b(q)\rangle$ はエネルギー・運動量が q_μ であるオンシェルのパイ中間子状態である：$q^2 = m^2_\pi$. b はアイソスピンについての添え字である．この崩壊は微視的には次の過程を経るものと理解できる．すなわち，オンシェルのパイ中間子 ($q^2 = m^2_\pi$) が擬スカラー結合 (5.95) によって，クォーク-反クォークに崩壊し，その q-$\bar{\text{q}}$ 対が軸性カレントにより対消滅する．(5.98) の左辺の行列要素は以下のように計算できる ($p_\pm \equiv p \pm q/2$)：

$$
\begin{aligned}
(5.98)\text{ の左辺} = & -i\mathrm{Tr}\tau_{\pm}\gamma_{\mu}\gamma_5 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, iS_F(p_+; M) \\
& \times (G_{\pi q} i\gamma_5 \tau_{\mp})\, iS_F(p_-; M) \\
= & \; i\sqrt{2} N_c N_F (G_{\pi q}/2) M q_{\mu} \\
& \times (-4i) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p_+^2 - M^2 + i\epsilon)(p_-^2 - M^2 + i\epsilon)} \\
= & \; i\sqrt{2} q_{\mu} \left[N_c G_{\pi q} M d_{\pi}(m_{\pi}^2) \right] \\
= & \; i\sqrt{2} q_{\mu}\, f_{\pi}.
\end{aligned} \tag{5.99}
$$

ここで $N_F = 2$ を代入し，次の量を定義した：

$$
d_{\pi}(m_{\pi}^2) = (-4i) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p_+^2 - M^2 + i\epsilon)(p_-^2 - M^2 + i\epsilon)} \Big|_{q^2 = m_{\pi}^2}. \tag{5.100}
$$

よって，

$$
f_{\pi} = N_c G_{\pi q} M\, d_{\pi}(m_{\pi}^2). \tag{5.101}
$$

(5.90) を用いて $d_{\pi}(m_{\pi}^2)$ を計算して，次の具体的関係式を得る：

$$
f_{\pi} = G_{\pi q} M C \cdot F(M/\Lambda, m_{\pi}/2\Lambda). \tag{5.102}
$$

これまで有限のカレントクォーク質量 $\hat{m}$ の効果を取り入れてパイ中間子に関係する物理量を計算した．特に，有限の $\hat{m}$ の効果によってパイ中間子は有限の質量 m_{π} を獲得するのであった．以下では，伝播関数 $D_{\pi}(m_{\pi}^2)$,（オンシェル）パイ-クォーク結合定数 $G_{\pi q}^2$ およびパイ中間子崩壊定数 f_{π} の表式を m_{π}^2 について展開することにより，カイラル極限で得られている様々の関係式（「低エネルギー定理」と呼ばれる）を導出してみよう．ここでの展開をもう少し厳密に言うと，$(m_{\pi}/2M)^2$ についての展開である．後で示すように，$M \simeq$335 MeV なので，この比は 4%であり十分小さい．

まず，$(m_{\pi}/2M)^2$ および高次の項を無視すると次の関係式が得られる：

$$
\frac{1}{G_{\pi q}^2} = C\, F(M/\Lambda, 0) = \frac{f_{\pi}}{G_{\pi q}\, M}. \tag{5.103}
$$

両辺に $G_{\pi q}^2 M$ を掛けると，次の（クォークレベルの）ゴールドバーガー－トリーマン (G-T) 関係式を得る：

$$
G_{\pi q}\, f_{\pi} = g_A^Q\, M. \tag{5.104}
$$

ここで，$g_A^Q = 1$ はこの理論でのクォークの軸性チャージである．逆に言うと，リング近似ではクォークの軸性チャージは厳密に 1 になる．歴史的には核子レベルで G-T 関係式は導出された．すなわち，$G_{\pi N}\, f_{\pi} = g_A\, M_N$．核子の軸性チャージ g_A は中性子のベータ崩壊のデータから導くことができる．文献 [23]

によれば，$g_A = 1.27$ である．これらを代入して得られるオンシェルのパイ-核子結合定数は $G_{\pi N} \simeq 12.8$ となり，分散理論 [2] 等を用いて現象論的に導出された値（13.0-13.3）とよく一致している：$G_{\pi N}$ の現象論的導出については文献 [49] を参照のこと．

G-T 関係式 (5.104) は

$$G_{\pi q} \simeq 3.6 \ \text{すなわち}, G_{\pi q}^2/4\pi \simeq 1.0, \tag{5.105}$$

を意味する．これはクォーク模型によってパイ-核子結合定数の値（$G_{\pi NN} = 13.65\text{-}14.11$）を再現するのに必要な値とよく一致している．

パイ中間子の伝播関数 $D_\pi(m_\pi^2)$ からパイ中間子質量を $(m_\pi/2M)^2$ について最低次で求めると，

$$m_\pi^2 = \frac{\hat{m}}{M}\frac{G_{\pi q}^2}{2g} \tag{5.106}$$

を得る．これに GT 関係式を代入すると，$f_\pi^2 m_\pi^2 = \hat{m}\frac{M}{2g} \simeq -\hat{m}\langle\bar{q}q\rangle$, すなわち，次のゲルマン–オークス–レンナー (GOR) 関係式を得る：

$$f_\pi^2 m_\pi^2 \simeq -\hat{m}\langle\bar{q}q\rangle. \tag{5.107}$$

ただし，右辺においては $\hat{m}/M$ を無視したカイラル極限が取られていることを強調する．

シグマ中間子に関する物理量についても同様の解析をすることができる．カイラル極限では $m_\sigma = 2M$ であった．有限のカレントクォーク質量では，

$$m_\sigma^2 = (2M)^2 + c_m m_\pi^2 \tag{5.108}$$

と書けるであろう．簡単な計算により，

$$c_m \simeq \frac{F(M/\Lambda, 0)}{F(M/\Lambda, M/\Lambda)} = 0.37, \quad m_\sigma \simeq 675\text{MeV}, \tag{5.109}$$

を得る．ここで，(5.112) と (5.113) に与えられている Λ と M の値を用いた．シグマ中間子の質量の表式 (5.108) は m_σ が q-$\bar{\text{q}}$ 連続状態にあることを示している．したがって，実際にはシグマ中間子の伝播関数の極は小さい虚数部を持つ複素数になっている．これは，閉じ込めの機構が取り入れられていないこの模型の限界である．そこで，この模型以外のダイナミクスによる閉じ込め効果を仮定して，たとえば，シグマ中間子の質量は逆伝播関数の実部のゼロとして求めることにする．

オンシェルの σ 中間子-クォーク結合定数は以下の表式で与えられる：

$$G_{\sigma q}^2 \equiv G_{\sigma q}^2(q^2 = m_\sigma^2) = \frac{1}{C}\left[\text{Pf}\int_0^\Lambda \frac{p^2 dp}{E_p}\frac{p^2}{(E_p^2 - m_\sigma^2/4)^2}\right]^{-1}. \tag{5.110}$$

ここで，Pf は超関数の 1 種であるアダマールの有限部分を示す[*11)]．$(m_\pi/2M)^2$ の最低次で

$$\frac{G_{\sigma q}^2}{G_{\pi q}^2} \simeq c_m \simeq 0.37, \tag{5.111}$$

を得る[*12)]．

最後に，有限温度や有限密度の媒質におけるこれらの低エネルギー定理の振る舞いについて展望をしてみよう．これらの「定理」に導く展開は，$(m_\pi/2M)^2$ あるいは $\hat{m}/M$ の小ささに依拠していた．これらの値は，有限温度であれ有限密度であれ，系が南部–ゴールドストーン相にある限り小さいはずである．したがって，このような媒質中でもここで得られた G-T 関係式や GOR 関係式はよい近似で成立するものと期待できる：第 6 章を参照．

5.2.2 理論のパラメーターの決定

我々の模型を QCD の有効模型として定義するために，理論内のパラメーター，結合定数 g と（3 次元）カットオフ Λ をパイ中間子崩壊定数 $f_\pi \simeq 93$ MeV とパイ中間子の質量 $m_\pi = 138$ MeV を再現するように決めよう．この決定には，カイラル展開を使わない．結果は，以下のようになる：

$$\Lambda = 631\ \text{MeV}, \quad g = 0.214\,\text{fm}^2. \tag{5.112}$$

ただし，$\hat{m} = 5.5\,\text{MeV}$ は与えられたものとして仮定した．このように理論が QCD の有効模型として定義された．このとき，他の興味ある物理量は以下の値を取る：

$$M = \ 335\ \text{MeV}, \quad m_\sigma = 675\ \text{MeV}, \quad G_{\pi q}^2/4\pi = 1.0, \quad \langle \bar{u}u \rangle = (-247\text{MeV})^3. \tag{5.113}$$

注意したいのは，対応する 4 次元カットオフは

$$\Lambda_4 = 2\sqrt{\Lambda^2 + M^2} \simeq 1.4\text{GeV}, \tag{5.114}$$

となることである．これは，マノハー–ジョージャイ [50] が想定するカイラル対称性の自発的破れの起こるスケールとよく一致している：

(i) ここに得られた値は驚くほど SU(4) クォーク模型（3 フレーバーの場合は SU(6) クォーク模型）[2],[31] など現象論的に要求される値を再現している．カイラル対称性の自発的破れの結果クォークが獲得する質量 $M = 335\,\text{MeV}$ は後に出てくる表 5.3 で示されているように，構成子クォーク模型（SU(6) 模型）において核子の磁気モーメントを再現するために要求される値と実験誤差の範

---

*11） L. シュワルツ（吉田 耕作，渡邊 二郎訳），物理数学の方法，岩波書店，1966.

*12） カイラル極限では，$q^2 = 0$ でのオフシェルでの結合定数が得られる：$G_{\sigma q}(q^2 = 0) = G_{\pi q}(q^2 = 0) = 3.6$.

囲で一致している．このことはストレンジネスクォークの場合も全く同様である．カレントクォーク質量 $m = 5.5$ MeV は標準模型におけるヒッグス機構によって生成されるのであるが，これは現実世界の物質の質量のほんの数パーセントしか説明しない．残りの 98 パーセント近くは（QCD レベルの）カイラル対称性の自発的破れによって生成されている．したがって，構成子クォーク質量 M_u, M_d のほとんどはカイラル対称性の自発的破れの結果実現するので，カレントクォークレベルでは $m_{u,d}$ が 2 倍も違っていてアイソスピン対称性が悪くても，$M_u \simeq M_d$ となり，ハドロンの世界においてアイソスピン対称性がよい近似で成立しているのである．このように $\mathrm{SU}(2)_L \otimes \mathrm{SU}(2)_R$-カイラル対称性とその自発的破れがハドロン世界でのアイソスピン対称性の起源であることはこの節の最初に強調した．逆に言うと，カイラル対称性の自発的な破れの概念によって，伝統的な SU(4) クォーク模型（3 フレーバーの場合は SU(6) 模型 [2],[31]）で要求される大きいクォーク質量と背景にある QCD の（近似的な）カイラル対称性が矛盾しないことが了解される．

(ii) パイ中間子-クォーク結合の存在を仮定し，核子構造の記述に SU(4) クォーク模型を用いて擬スカラー型のパイ-核子結合定数 $G_{\pi N}$ を導出することができる．ここで得られた $G_{\pi q}$ の値，$G_{\pi q}^2/4\pi = 1.0$，を用いると，現象論的な解析 [49] から導き出された値 $G_{\pi N}^2/4\pi = 13.65\text{-}14.1$ が再現できる．つまり，この簡単な NJL 模型は質量だけでなくその結合の仕方についてもパイ中間子の性質をよく記述していることが分かる．これは，クォークレベルでカイラル対称性とその破れによる G-T 関係式が成立するように構成しさえすれば，構成子クォーク模型が核子の性質をよく記述することを意味している．

(iii) 同様のことは，シグマ中間子-クォーク結合定数についても言える．まず，カイラル対称性のために，パイ中間子の質量とともに同じ必然性でシグマ中間子の質量が得られたことに注意しよう．実際，その質量 m_σ はカイラル極限では動的に獲得されたクォーク質量 M のちょうど 2 倍である：この質量間の関係はフレーバー数 1 の場合に「南部関係式」として強調した．このような比較的軽いスカラー中間子の存在は長いあいだ論争の的であり，その存在と性質は QCD に基づく様々のハドロンダイナミクスの特性にからめて現在もホットな話題となっている．もう少し立ち入った議論は後の章ですることにし，ここでは核力にからんだ一つの側面だけ紹介する．現象論的には核力の中間レインジには状態に依らない強い引力が存在する．この引力がなければ原子核，したがって物質は存在し得ない．このような引力は質量が 500-700 MeV 程度のスカラー・アイソスカラー中間子が存在すれば自然に説明できる．さらに，そこで必要とされる結合定数 $G_{\sigma N}$ の値は $G_{\sigma N}^2/4\pi \simeq 10$ である．驚くべきことに，SU(4) 模型を用いると，この NJL 模型で得られたシグマ-クォーク結合定数の値が丁度現象論的に要求される値と一致している．

ここではパイ中間子とシグマ中間子に関係する 2，3 の性質だけについて例

示しただけだが，このセクターにおけるNJL模型のこのような現象論的な「成功」はこの模型が低エネルギーのハドロン世界の有効模型として成立していることを強く示唆している．このことは，次節で議論する3フレーバーの場合により印象的になる．

5.3 軸性異常項を含む3フレーバーの場合

次に，軸性異常項を含むようにNJL模型を拡張して[51],[52]，ストレンジネスを含む3フレーバーの場合のカイラルダイナミクスの基礎的な事項を扱う*13)．ここでの興味ある対象は8個の南部–ゴールドストーンボソン（パイ，ケイそしてイータ中間子）とイータプライム η' である．η' の $1\mathrm{GeV}/c^2$ ほどの大きい質量はQCDの軸性異常によることはすでに何度も述べた．したがって，ストレンジネスを含むカイラルダイナミクスを記述するには，カイラル対称性とともに軸性異常を取り入れた考察が本質的に重要である．

この章で扱うカイラル有効模型を書き下そう：

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = &\ \bar{q}i\gamma\cdot\partial q + \sum_{a=0}^{8}\frac{g_S}{2}[(\bar{q}\lambda_a q)^2 + (\bar{q}i\lambda_a\gamma_5 q)^2] - \bar{q}\boldsymbol{m}q \\ &+g_D[\det\bar{q}_i(1-\gamma_5)q_j + \det\bar{q}_i(1+\gamma_5)q_j] \\ \equiv &\ \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\mathrm{S}} + \mathcal{L}_{\mathrm{SB}} + \mathcal{L}_{\mathrm{KMT}}. \end{aligned} \tag{5.115}$$

この模型ラグランジアンにより，次の非摂動的QCDダイナミクス3つの基本的な性質が取り入れられることに注意しよう．すなわち，(i) カイラル対称性の動的な破れ，(ii) $\mathcal{L}_{\mathrm{KMT}}$ による軸性異常，そして (iii) カイラル対称性をあらわに破るカレントクォーク質量 $\mathcal{L}_{\mathrm{SB}}$，である．

この模型により低エネルギーのハドロン現象の多くが以上の3つの効果の競合の結果として定量的かつ明快に理解できることをいくつかの例を使って示そう．以下での計算は2フレーバーの場合と重なる部分が多いので，計算の提示は新しい部分のみに重点をおいた簡単なものとする．次の章では，この有効模型が有限温度・密度系における相転移や素励起の研究にも有用であることを示す．

この模型ラグランジアンは1970年に小林と益川によって考察されていた．したがって，ラグランジアン (5.115) は小林–益川–南部–ヨナラシニオ (KM-NJL) 模型と呼ばれてもよい．以下にこの模型についての歴史的背景について述べる．

5.3.1 歴史的背景

小林と益川は1970年に，η' の大きな質量と η-η' 混合の問題をゲルマン–オークス–レンナー関係式および3フレーバーのNJL模型をもとに考察し，（カレントクォーク質量による）カイラル対称性のあらわな破れを取り入れただけで

*13) より詳しい解説は，総合報告 [39] で見ることができる．

はη'の大きな質量を説明することはできず，クォーク間には行列式型で書ける6クォーク相互作用$\mathcal{L}_{\text{KMT}}$が存在しなければならないことを結論した*14)．この行列式型相互作用は，トホーフトによって1976年に導出されたインスタントンに誘起されるクォーク間相互作用に含まれている．そのため，文献ではトホーフトバーテックスと呼ばれることも多い．しかし，ここでは上で記述した歴史的な経過から小林–益川–トホーフト(KMT)項と呼ぶことにする．後に示すように，この相互作用が現実のη-η'系の性質を再現するためには，$g_D < 0$でなければならないが，これは，$N_F = 3$の場合のインスタントン誘起相互作用の性質と整合的である*15)．

元のNJL模型ではクォーク間相互作用は2体相互作用（4フェルミオン相互作用）のみである．4フェルミオン相互作用に限って3フレーバーの場合を扱うと，必然的にそのハミルトニアンは$\mathrm{U}(3)_L\otimes \mathrm{U}(3)_R$対称になり，$\mathrm{U}(1)_A$は破れない．そのため，$\mathrm{SU}(3)_L\otimes \mathrm{SU}(3)_R$不変な相互作用を作ろうとするとどうしても行列式型の6フェルミオン型相互作用が必要になることを小林–益川は示したのである．小林–益川の提案した拡張されたNJL模型はその後1976年にシェヒターたちによって独立に議論された[54]．

この拡張されたNJL模型の最初の系統的な解析は1980年代半ばになされた[51],[52],[55]~[58]．そのときに問題となったのは重粒子セクターのOZI則[32]の破れの定量的な理解であった．具体例の一つにπ-Nシグマ項$\Sigma_{\pi N} = \hat{m}\langle N| : \bar{u}u + \bar{d}d : |N\rangle$の大きな値に関連した核子中のスカラーチャンネルにおけるストレンジネス成分の評価の問題がある[59]．KMT項の形で表された軸性異常項は擬スカラーのチャンネルだけでなく，スカラーチャンネルのフレーバー混合を引き起こす．したがって，KMT項によって表現された軸性異常が重粒子中のOZI則の破れの起源になり得ると考えられたのである．ちなみに，スカラー・擬スカラーチャンネルだけでなく，ベクトルと軸性ベクトルのチャンネルを含むように拡張された模型も提案されている．関連して議論された問題は，陽子スピンの起源の問題であった[60]．いわゆる「陽子スピンの危機」は軸性ベクトルチャンネルにおけるフレーバー混合の問題として解釈された．この考え方は，独立にフリッツら[61]によっても追求されている．また最近，$\Sigma_{\pi N}$や核子中のストレンジネス成分$m_s\langle N| : \bar{s}s : |N\rangle$は格子QCDによって盛んに計算されているが未だ確定的な答えに至っていないようである（詳しくは後述する）．

5.3.2　変換性

カレントクォーク質量項$\mathcal{L}_{\text{SB}}$はあらわに$SU(3)_V$対称性を破っている：

---

*14)　詳細な計算はその後1971年に小林，近藤，益川によってなされた[53]．

*15)　$N_F = 2$でのインスタントンが誘起するクォーク間の行列式型相互作用の係数の符号は正である．

$$\mathcal{L}_{\rm SB} = -\bar{q}\boldsymbol{m}q = -\sum_{a=0,3,8} m_a\,\bar{q}\lambda_a q. \tag{5.116}$$

ただし,

$$m_0 = (m_u+m_d+m_s)/\sqrt{6},\ m_3 = (m_u-m_d)/2,\ m_8 = (m_u+m_d-2m_s)/2\sqrt{3}.$$

ここで，アイソスピン対称性を仮定すると，質量項は以下のようになる：$\mathcal{L}_{\rm SB} = -m_0\,\bar{q}\lambda_0 q - m_8\,\bar{q}\lambda_8 q$.

次に，このラグランジアンから導かれるネーターカレントとそのダイバージェンスを書き下しておく．まず，(2.141) において定義された $\boldsymbol{\Phi}$ に対するフレーバー $\mathrm{U}(3)_V$ 変換は，(2.129) においてパラメーターを (2.139) のように設定して得られる．したがって，無限小のフレーバー $\mathrm{U}(3)_V$ 変換

$$\Phi \to \Phi' = \Phi + \delta_k \Phi$$

を行うと,

$$\begin{aligned} \delta_k\Phi &= i\alpha_k/2\cdot[\lambda_k,\Phi], \quad &;k\neq 0,\\ &= 0, &;k=0. \end{aligned} \tag{5.117}$$

一方同様にして，軸性 $\mathrm{U}(3)_A$ 変換はパラメーター設定 (2.140) によって与えられる．したがって，無限小の軸性 $\mathrm{U}(3)_A$ 変換

$$\Phi \to \Phi' = \Phi + \delta'_k \Phi$$

に対しては,

$$\begin{aligned} \delta'_k\Phi &= -i\frac{1}{2}\beta_k\cdot\{\lambda_k,\Phi\}, \quad &;k\neq 0,\\ &= -i\beta_0\,\Phi, &;k=0. \end{aligned} \tag{5.118}$$

これらより，特に,

$$\begin{aligned} \delta'_{k=0}\det\Phi &= -i3\beta_0\,\det\Phi,\\ \delta'_{k=0}\det\Phi^\dagger &= +i3\beta_0\,\det\Phi^\dagger. \end{aligned} \tag{5.119}$$

こうして，$\mathrm{U}(3)_V$，$\mathrm{SU}(3)_A$ そして $\mathrm{U}(1)_A$ 変換に対するネーターカレントのダイバージェンスを以下のように得る：

$$\begin{aligned} \partial_\mu(\bar{q}\gamma^\mu\lambda^a q) &= i\sum_{i,j}^{3}\bar{q}_i(m_i-m_j)\lambda^a q_j \quad (a=0,1,\ldots,8)\\ \partial_\mu(\bar{q}\gamma^\mu\gamma_5\lambda^a q) &= i\sum_{i,j}^{3}\bar{q}_i(m_i+m_j)\gamma_5\lambda^a q_j \quad (a=1,\ldots,8)\\ \partial_\mu(\bar{q}\gamma^\mu\gamma_5 q) &= i\sum_{i}^{3}\bar{q}_i 2m_i\gamma_5 q_i - 4N_F g_D\,\mathrm{Im}\,(\det\Phi). \end{aligned} \tag{5.120}$$

ここで,

$$\mathrm{Im}\,(\det\Phi) = \frac{1}{2i}\,(\det\Phi\ -\ \mathrm{h.c.}).$$

スカラー理論で導いた (4.38) に対応することに注意しよう. また, この表式は QCD から導かれる (3.10) に対応するべきものである. この比較から, グルーオン場で書かれた演算子 $\frac{g^2}{32\pi^2}F^a_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}_a$ がクォーク場で書かれた演算子 $ig_D(\det\Phi\ -\ \mathrm{h.c.}) = -2g_D\mathrm{Im}(\det\Phi)$ によって実効的に表現されていると解釈される.

KMT 項のダイナミクスに与える影響を見てみよう. $\mathrm{U}(3)_L\otimes\mathrm{U}(3)_R$-対称な項 $\mathcal{L}_\mathrm{S}$ はフレーバーに分解すると,

$$\mathcal{L}_\mathrm{S}\ \sim\ (\bar{u}\Gamma u)^2\ +\ (\bar{d}\Gamma d)^2\ +\ (\bar{s}\Gamma s)^2,$$

となり, $(\bar{u}\Gamma u)(\bar{d}\Gamma d)$ のような項が存在せず, フレーバーの混合を引き起こさない. ここで, $\Gamma = 1$ または γ_5. 一方, カイラル対称性がダイナミカルに破れている場合, KMT 項はフレーバー混合を引き起こし得る. 実際この場合, KMT 項から $\langle\bar{d}d\rangle(\bar{u}u)(\bar{s}s)$ や $-\langle\bar{d}d\rangle(\bar{u}i\gamma_5 u)(\bar{s}i\gamma_5 s)$ などの項が誘起され, スカラーチャンネルおよび擬スカラーチャンネルにおけるフレーバー混合が起こる. そしてこの擬スカラーチャンネルにおけるこのフレーバー混合が η' の質量を $1\mathrm{GeV}/c^2$ まで引き上げる起源となるのである. 以下では, $c = \hbar = 1$ の単位系 (自然単位系) を取る. この場合, 質量はエネルギー単位 MeV あるいは GeV 単位で与えられる.

5.3.3 真空の決定

この模型ラグランジアンにおける真空は, $N_F = 1$ あるいは $N_F = 2$ のときと同様に, 自己無撞着平均場理論によって決めることができる. ただ, 6 フェルミオン相互作用 (3 体相互作用) に対してはこれまでにない複雑な解析が必要である.

平均場近似はラグランジアンの中で次のような置き換えをすることと等価である (ただし, 交換項 (フォック項) は無視した):

$$\begin{aligned}
\bar{q}_i q_i \bar{q}_j q_j\ &\to\ \langle\bar{q}_i q_i\rangle\bar{q}_j q_j + \langle\bar{q}_j q_j\rangle\bar{q}_i q_i - \langle\bar{q}_i q_i\rangle\langle\bar{q}_j q_j\rangle,\\
\bar{q}_i q_i \bar{q}_j q_j \bar{q}_k q_k\ &\to\ \sum_{i,j,k;\mathrm{cyclic}}\ \langle\bar{q}_i q_i\rangle\langle\bar{q}_j q_j\rangle\bar{q}_k q_k -\ 2\langle\bar{q}_i q_i\rangle\langle\bar{q}_j q_j\rangle\langle\bar{q}_k q_k\rangle.
\end{aligned} \tag{5.121}$$

ここで,「cyclic」とは (i, j, k) を (u, d, s) について循環的に足し合わせることを意味する. 各最後の項 (c-数) は, 全エネルギーの評価において相互作用の数え過ぎを避けるために必要である. このこと自体は多体問題の平均場理論 [41] ではお馴染みのことであるが, 3 体相互作用の扱いはあまり知られていなかった.

実際，2 体相互作用（4 フェルミオン相互作用）のみであれば経路積分を使ってガウス積分に基づく標準的な補助場の方法[20] から出発して停留位相近似を行うと上記の平均場近似の結果が得られる．しかし，3 体相互作用に対しては単純なガウス積分が適用できないので特別な工夫が必要である．

こうして，平均場近似された次のラグランジアンが得られる：

$$\mathcal{L}_{\text{MFA}} = \bar{q}(i\gamma\cdot\partial - \boldsymbol{M})q - g_{S}\text{Tr}(\phi^{\dagger}\phi) - 2g_{D}(\det\phi + \text{c.c.}). \tag{5.122}$$

ここで，ϕ は c-数からなる対角型の 3×3 行列であり，以下のように定義される：

$$\phi = \langle\Phi\rangle \equiv \text{diag}(\langle\bar{u}u\rangle, \langle\bar{d}d\rangle, \langle\bar{s}s\rangle). \tag{5.123}$$

さらに，構成子質量行列 $\boldsymbol{M} = \text{diag}(M_u, M_d, M_s)$ の各成分はクォークスカラー凝縮体を用いて以下のように書ける：

$$\begin{aligned} M_u &= m_u - 2g_s\alpha - 2g_D\beta\gamma, \\ M_d &= m_d - 2g_s\beta - 2g_D\alpha\gamma, \\ M_s &= m_s - 2g_s\gamma - 2g_D\alpha\beta, \end{aligned} \tag{5.124}$$

ただし，以下のように略記した：

$$(\alpha,\beta,\gamma) \equiv (\langle\bar{u}u\rangle, \langle\bar{d}d\rangle, \langle\bar{s}s\rangle).$$

一方，各フレーバーの凝縮体は構成子質量 M_i を用いて書かれている：

$$\langle\bar{q}_i q_i\rangle = -2N_c \sum_{|\boldsymbol{p}|<\Lambda} M_i \Big/ \sqrt{M_i^2 + p^2}. \tag{5.125}$$

すなわち，質量および凝縮体は自己無撞着に決定される．超伝導の BCS 理論との類似性から (5.125) および (5.124) を込みにして「ギャップ方程式」と呼ぶのはこれまでと同じである．

KMT 項のために数学的にはこの「ギャップ方程式」は 3 つのフレーバーについての非線型の結合方程式になっていることは注意に値する．すなわち，すべてのフレーバーのクォーク凝縮体（構成子質量）は独立には決めることができず，すべてを「一挙に」解かなくてはいかない．

さらに，このように自己無撞着に決定されたクォーク凝縮体 $(\alpha,\ \beta,\gamma)$ が真の真空を決めているかどうかを，すなわち，真空のエネルギーが次のように与えられる有効ポテンシャルの最小値になっているかを確かめる必要がある：

$$\mathcal{V}(\phi) = iN_c\text{Tr}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\ln\left(\frac{p\cdot\gamma - M}{p\cdot\gamma - m}\right) + g_s(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) + 4g_D\alpha\beta\gamma. \tag{5.126}$$

ここで，第 1 項は非摂動的な真空と摂動的な真空の「ディラックの海」のエネルギー密度の差である；一方，斥力的な寄与となっている第 2，第 3 項はそれ

ぞれ 4 体および 6 体の相互作用の数え過ぎを避けるために必要な項である．

簡単な計算で，真空エネルギーのクォーク凝縮体についての停留条件

$$\frac{\partial \mathcal{V}(\phi)}{\partial \phi} = 0, \tag{5.127}$$

が,「ギャップ方程式」 (5.125) および (5.124) と等価であることが確認できる．

ここに現れる運動量積分はすべて発散積分であり，模型の一部としてカットオフが導入される．ここでは，これまでと同様に正準カットオフスキームを取り，3 次元運動量カットオフ Λ を導入する．理論のパラメーターは，カレントクォーク質量 (m_u, m_d, m_s)，2 個の結合定数 g_s，g_D そしてカットオフ Λ である．このうち，m_u, m_d は他のソースから与えることにする．

5.3.4 励起スペクトル

基底状態としての真空が定まったので，この新しい真空の上でのボソン的素励起としての中間子スペクトルを求めよう．そのためにはまず，新しい真空上での中間子励起を誘起する相互作用を同定しなくてはならない．すなわち，真空の決定に寄与した相互作用とそれに取り込めきれなかった相互作用，すなわち，残留相互作用を求める必要がある．そこに新しい真空上の素励起の特徴が表現されているはずである．このことを体系的に行うには，平均場近似での取り扱いを超えて，(5.121) の変形の基礎にあるウィックの定理[3],[41] を用いて，相互作用項を新しい真空についての期待値と正規積の積の和に分解すればよい[41]．すなわち，相互作用を次のように再定義する：

$$\begin{aligned}\bar{q}_i q_i \bar{q}_j q_j =\ & \langle \bar{q}_i q_i \rangle \bar{q}_j q_j + \langle \bar{q}_j q_j \rangle \bar{q}_i q_i - \langle \bar{q}_i q_i \rangle \langle \bar{q}_j q_j \rangle \\ & + :\bar{q}_i q_i \bar{q}_j q_j:, \end{aligned} \tag{5.128}$$

$$\begin{aligned}\bar{q}_i q_i \bar{q}_j q_j \bar{q}_k q_k =\ & \sum_{i,j,k;\mathrm{cyclic}} \langle \bar{q}_i q_i \rangle \langle \bar{q}_j q_j \rangle \bar{q}_k q_k - 2\langle \bar{q}_i q_i \rangle \langle \bar{q}_j q_j \rangle \langle \bar{q}_k q_k \rangle \\ & + \sum_{i,j,k;\mathrm{cyclic}} \langle \bar{q}_i q_i \rangle :\bar{q}_j q_j \bar{q}_k q_k: + :\bar{q}_i q_i \bar{q}_j q_j \bar{q}_k q_k:. \end{aligned} \tag{5.129}$$

定義により，正規積の真空期待値はゼロであること（$\langle : O : \rangle = 0$）に注意．すなわち，正規積は $\mathcal{L}_{\mathrm{MFA}}$ のフォック真空について定義されている．(5.129) のうち正規積の部分が残留相互作用である．残留相互作用は 4 フェルミオン相互作用と 6 フェルミオン相互作用からなる．このうち 4 フェルミオン相互作用は元の 4 フェルミオン相互作用 $\mathcal{L}_{\mathrm{S}}$ からだけではなく，6 フェルミオン相互作用である KMT 項からの寄与も含むことに注意しよう．この新しい 4 フェルミオン相互作用はカイラル対称性の自発的破れの結果誘起されたものである．6 フェルミオン残留相互作用は，複合系である中間子間の相互作用，特に中間子の 2 体崩壊の記述や後に述べる H ダイバリオンの記述において重要な役割を果たす．

表 5.1 残留相互作用に含まれる各チャンネルの結合定数．クォーク凝縮体とKMT結合定数 g_D に特異な形で依存していることに注意．

スカラーチャンネル		
$G_\delta = g_S - g_D\gamma$	$G_{\kappa^\pm} = g_S - g_D\beta$	$G_{\kappa^0} = g_S - g_D\alpha$
$G^S_{00} = g_S + \frac{2}{3}(\alpha+\beta+\gamma)g_D$	$G^S_{33} = G_\delta$	$G^S_{88} = g_S + \frac{1}{3}(\gamma - 2\alpha - 2\beta)g_D$
$G^S_{03} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\alpha - \beta)g_D$	$G^S_{38} = -\frac{1}{\sqrt{3}}(\alpha - \beta)g_D$	$G^S_{08} = \frac{\sqrt{2}}{6}(2\gamma - \alpha - \beta)g_D$

擬スカラーチャンネル		
$G_\pi = g_S + g_D\gamma$	$G_{K^\pm} = g_S + g_D\beta$	$G_{K^0} = g_S + g_D\alpha$
$G^P_{00} = g_S - \frac{2}{3}(\alpha+\beta+\gamma)g_D$	$G^P_{33} = G_\pi$	$G^P_{88} = g_S - \frac{1}{3}(\gamma - 2\alpha - 2\beta)g_D$
$G^P_{03} = -\frac{1}{\sqrt{6}}(\alpha - \beta)g_D$	$G^P_{38} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\alpha - \beta)g_D$	$G^P_{08} = -\frac{\sqrt{2}}{6}(2\gamma - \alpha - \beta)g_D$

上の処方箋を相互作用全体に適用すると，中間子励起を誘起する残留4フェルミオン相互作用は以下のようにまとめられる：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\rm res} &= g_S : {\rm Tr}(\Phi^\dagger\Phi) : \\ &\quad + g_D : [{\rm Tr}(\phi\Phi^2) - {\rm Tr}(\phi\Phi){\rm Tr}\Phi - \frac{1}{2}{\rm Tr}\Phi^2{\rm Tr}\phi + \frac{1}{2}{\rm Tr}\phi({\rm Tr}\Phi)^2 + {\rm h.c.}] : \\ &\quad + g_D : (\det\Phi + {\rm h.c.}) : . \end{aligned} \tag{5.130}$$

この相互作用の物理的な内容を見るために，フレーバー SU(3) 基底で次のボソン的なスカラーおよび擬スカラー演算子を導入する：

$$S_a = \bar{q}\lambda_a q, \quad P_a = \bar{q}i\gamma_5\lambda_a q. \quad (a = 0, 1, \ldots 8).$$

これらの演算子を用いると，(5.130) を次のようにフレーバーチャンネル毎に分解することができる：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{(4)}_{\rm res} = &\quad \frac{1}{2}[(G_\delta \sum_a^{1,2} + G_{\kappa^\pm}\sum_a^{4,5} + G_{\kappa^0}\sum_a^{6,7}) : S_a^2 : + \sum_{a,b}^{0,3,8} : S_a G^S_{ab} S_b :] \\ &+ \frac{1}{2}[(G_\pi \sum_a^{1,2} + G_{K^\pm}\sum_a^{4,5} + G_{K^0}\sum_a^{6,7}) : P_a^2 : + \sum_{a,b}^{0,3,8} : P_a G^P_{ab} P_b :]. \end{aligned} \tag{5.131}$$

ここで，各チャンネルの結合定数 G_α は表 5.1 にまとめられている．この表からは以下のことが注目される：(i) KMT 項 g_D は，スカラーチャンネルと擬ス

カラーチャンネルでは逆符号で寄与している．これは，擬スカラーとスカラーチャンネルの中間子に対して異なる混合性の原因となるであろう．(ii) フレーバー対称性が破れているために，SU(3) 基底での混合を生み出す非対角な結合定数 $G_{ij}(i \neq j)$ が存在する; KMT 項が存在しない場合，$\mathrm{SU}(3)_V$ 極限では混合項は消える．

この相互作用を用いて，擬スカラーおよびスカラー中間子の質量や崩壊率などの性質を量子効果として計算することができる．詳しくは [39] を参照のこと．以下では，KMT 項を含む NJL 模型によって η-η' 系を含めその他の興味ある物理量がどのように記述できるかについて概説するとともに関連する問題について簡単に述べる．

5.4 η-η' 系のスペクトルと混合角

η-η' 系に関与する残留相互作用は以下のように与えられる（$\eta_a \equiv \bar{q}i\gamma_5\lambda_a q$）：

$$\mathcal{L}^{\eta}_{\mathrm{res}} = \frac{1}{2}\sum_{a,b=8,0} :\eta_a G^P_{ab}\eta_b: . \tag{5.132}$$

ここに，

$$\eta_0 = (\bar{u}i\gamma_5 u + \bar{d}i\gamma_5 d + \bar{s}i\gamma_5 s)/\sqrt{3}, \quad \eta_8 = (\bar{u}i\gamma_5 u + \bar{d}i\gamma_5 d - 2\bar{s}i\gamma_5 s)/\sqrt{6}.$$

結合定数 G^P_{ab} は表 5.1 に与えられている．以下では，アイソスピン対称性を仮定する ($m_u = m_d \equiv \hat{m}$; したがって，$\alpha = \beta$)．ストレンジクォークのカレントクォーク質量 m_s が $\hat{m}$ より大きい．そのためフレーバー SU(3) 対称性が破れて，8 重項 (η_8) と 1 重項 (η_0) の線型結合が物理的なモード η および η' になる．前にも述べたように，インスタントンが誘起する行列式型のクォーク間相互作用の結合定数は負である．すなわち，$g_D < 0$．これはちょうど実験が要求する性質である．実際，g_D が負の場合，次の不等号が成り立つ：

$$G^P_{00} \equiv \; g_S - \frac{2}{3}(\alpha+\beta+\gamma)g_D \; < \; G^P_{88} \equiv g_S + \frac{1}{3}(2\alpha + 2\beta - \gamma)g_D. \tag{5.133}$$

この不等号は，1 重項のチャンネルでの方が 8 重項のチャンネルでの方よりもクォーク-反クォーク間の引力が小さく，各チャンネルの擬スカラーモードの質量 $m_{\eta_{0,8}}$ に対して，

$$m_{\eta_8} < m_{\eta_0},$$

となることを意味する．さらに定量的には，g_D への依存性は G^P_{00} において最も大きく，η_0 のモードが最も KMT 項に敏感であることが分かる．

物理的なフレーバーの成分の基底

$(\bar{u}i\gamma_5 u, \bar{d}i\gamma_5 d, \bar{s}i\gamma_5 s)$,

で表示すると，η-η'-π^0 系の結合定数行列 $\boldsymbol{G}_{\eta\pi^0}$ は以下のように書ける：

$$\boldsymbol{G}_{\eta\pi^0} = 2\begin{pmatrix} g_S & -g_D\gamma & -g_D\beta \\ -g_D\gamma & g_S & -g_D\alpha \\ -g_D\beta & -g_D\alpha & g_S \end{pmatrix}. \tag{5.134}$$

フレーバー混合を引き起こす $\boldsymbol{G}_{\eta\pi^0}$ の非対角項は g_D に比例しており，軸性異常項 g_D の絶対値が大きいほどフレーバー混合が大きくなることが分かる．しかし，非対角項は g_D だけでなくクォーク凝縮体 (α, β, γ) にも比例していることは強調するに値する．すなわち，η-η'-π^0 系のフレーバー混合は軸性異常だけではなく，カイラル対称性の自発的な破れがなければ存在しないことになる．

フレーバー SU(3) の基底で表すと，$\boldsymbol{\eta}$-複合系の伝播関数は以下のように表される：

$$\boldsymbol{D}(q^2) = -\boldsymbol{G}_P^{-1}\left(\frac{1}{1+\boldsymbol{G}_P\boldsymbol{\Pi}^P(q^2)}\right). \tag{5.135}$$

ここで，$(\boldsymbol{\Pi}^P)_{ab}$ は分極テンソルである．η と η' の混合の度合い（混合角 θ_η）は次のように $\boldsymbol{D}^{-1}(q^2)$ を対角化することによって得られる：

$$\boldsymbol{T}(\theta_\eta)\boldsymbol{D}^{-1}(q^2)\boldsymbol{T}(\theta_\eta)^{-1} = \mathrm{diag}(D_\eta^{-1}(q^2),\, D_{\eta'}^{-1}(q^2)), \tag{5.136}$$

$$\boldsymbol{T}(\theta_\eta) = \begin{pmatrix} \cos\theta_\eta & -\sin\theta_\eta \\ \sin\theta_\eta & \cos\theta_\eta \end{pmatrix}. \tag{5.137}$$

注意すべきことは，このようなダイナミカルな理論においては混合角がエネルギー依存性を持つことである．すなわち，η のオンシェルで定義した混合角 $\theta(m_\eta^2)$ と η' のオンシェルで定義した混合角 $\theta(m_{\eta'}^2)$ とは，一般には値が異なる．通常の実験の解析ではエネルギー依存性を無視して行われていることが多い．

さて，この混合角 θ_η，すなわち，η-η' の物理的な成分は KMT 項で表される軸性異常とカレントクォーク質量の違い $(m_s \gg m_{u,d})$ による $\mathrm{SU(3)}_V$-対称性の破れの競合によって決まっている：前者は純粋な $\mathrm{SU(3)}_V$ 基底を選ぶように（θ_η を小さくするように）働き，後者は逆に働く．事実，

- $g_D = 0$ のとき，フレーバー基底で

$$\boldsymbol{G}^P = g_s \cdot \mathbf{1}_3,$$

となり，フレーバー混合はなく「理想混合」が実現される $(\theta_\eta = -54.75^\circ)$：

$$\eta = (\bar{u}i\gamma_5 u + \bar{d}i\gamma_5 d)/\sqrt{2}, \quad \eta' = \bar{s}i\gamma_5 s. \tag{5.138}$$

表 5.2 KM-NJL 模型によるいくつかの物理量の計算結果とそれらの実験値あるいは他の情報から得られる値との比較．$*$ を付けた物理量は模型のパラメーターを決めるためにインプットとして使ったもの[39]．

	計算結果	'実験値'
$\langle \bar{u}u \rangle^{NP}$	$-(245)^3$	$-(225 \pm 25)^3$ MeV^3
$\langle \bar{s}s \rangle^{NP} / \langle \bar{u}u \rangle^{NP}$	0.78	0.8 ± 0.1
m_π (m_K)	138* (496*)	138 (496) MeV
m_η $(m_{\eta'})$	487 (958*)	549 (958) MeV
m_σ $(m_{\sigma'})$	668 (1348)	$\sim$ 700 ($\sim$ 1400) MeV
f_π (f_K)	93.0* (97.7)	93 (113) MeV
f_η $(f_{\eta'})$	94.3 (90.8)	93±9 (83±7) MeV
θ_η (φ_σ)	-21° (-6.8°)	$\sim -20^\circ$ $(-)$
$G_{\pi q}$ (G_{Kq})	3.5 (3.6)	$\sim$ 3.5 $(-)$
$G_{\pi N}$ $(G_{\sigma N})$	12.7 (7-10)	13.0-13.3 ($\sim$10.0)

- 一方，$g_D \neq 0$ かつフレーバー対称（$m_s = m_{u,d}$）のときには，$\theta_\eta = 0^\circ$ となり，フレーバー SU(3) の既約表現が物理的な状態となる：

$$
\begin{aligned}
\eta = &\ \ \eta_8 = (\bar{u}i\gamma_5 u + \bar{d}i\gamma_5 d - 2\bar{s}i\gamma_5 s)/\sqrt{6}, \\
\eta' = &\ \ \eta_0 = (\bar{u}i\gamma_5 u + \bar{d}i\gamma_5 d + \bar{s}i\gamma_5 s)/\sqrt{3}.
\end{aligned} \tag{5.139}
$$

$g_D \neq 0$ かつ $m_s > m_{u,d}$ となる現実の状況における混合角の数値計算の結果は

$$
\theta_\eta(m_\eta^2) = -20.9^\circ,
$$

となる．ただし，この模型の計算では

$$
m_\eta = 486.5\text{MeV}, \quad m_{\eta'} = 957.5\text{MeV} \tag{5.140}
$$

である．ただし，後者はフィットした値である．

ちなみに，KM-NJL 模型のパラメーターは，$m_{\eta'}$ とともに以下の物理量を再現するように決めることができる：

$$
m_\pi = 138\text{MeV}, \quad f_\pi = 93\text{MeV}, \quad m_K = 495.7\text{MeV}. \tag{5.141}
$$

1 GeV スケールでの $\hat{m}$ の値として 5.5 MeV を取った結果は以下の通りである：

$$
\Lambda = \ 631.4\text{MeV}, \ \ g_S\Lambda^2 = 3.666, \ \ g_D\Lambda^5 = -9.288, \ \ m_s = 135.7\,\text{MeV}. \tag{5.142}
$$

5.5 重粒子に関係する興味ある物理量：カイラルクォーク模型

前節で決められたパラメーターをもとに計算されたいくつかの物理量を表 5.2 に提示した.

カイラル対称性の自発的破れの結果，クォークは以下の質量を得る：

$$M_u = M_d = 335\text{MeV}, \quad M_s = 527\text{MeV}. \tag{5.143}$$

これらの値はいずれも構成子クォーク模型[2],[22],[31],[63],[64] で使われるクォーク質量によく対応している*16) 後に，(5.143) で与えられる質量を構成子クォーク模型の質量と同定し，重粒子の質量が 1 パーセント以内の誤差で再現できることを示す．ここでは，(5.143) を構成子クォーク質量と同定することにより重粒子の磁気モーメントがよく再現できることを示そう.

陽子と中性子の磁気モーメントは，核磁子

$$\mu_{\text{n.m.}} \equiv \frac{e}{2M_P}$$

を単位として

$$\mu_P = 2.79, \quad \mu_N = -1.91$$

である．質量が (5.143) で与えられるとき，

$$\begin{aligned} \mu_u = & \ \frac{2}{3}\frac{2}{2M_u} = 1.864, \quad \mu_d = -\frac{1}{2}\mu_u, \\ \mu_s = & \ \frac{-1}{3}\frac{2}{2M_s} = -0.593 \end{aligned} \tag{5.144}$$

となる．一方，非相対論的構成子クォーク模型（SU(6) 模型）[2],[22],[31] によれば，陽子と中性子の磁気モーメントは μ_u, μ_d を用いて，それぞれ，

$$\mu_P = 4\mu_n/3 - \mu_d/3, \quad \mu_N = 4\mu_d/3 - \mu_u/3 \tag{5.145}$$

と表される．他の重粒子についても同様の公式が成り立つ．表 5.3 にこのようにして得られる重粒子の磁気モーメントと実験値を載せた．波動関数が第 0 近似のものであるにもかかわらず，理論値と実験値はよく一致している.

表 5.2 におけるクォーク凝縮 $\langle\bar{q}q\rangle^{NP}$ は次の表式で定義される凝縮体の「非摂動部分」である*17)：

$$\langle\bar{q}q\rangle^{NP} \equiv \langle:\bar{q}q:\rangle = \langle\bar{q}q\rangle - \langle\bar{q}q\rangle^{pert.}. \tag{5.146}$$

ここで，第 2 項はカレントクォーク質量 m_q を持つクォーク場による真空凝縮体

---

*16) たとえば，[22] によれば $M_u = M_d = 363\text{MeV}, \quad M_s = 538\text{MeV}$ である.

*17) T. Hatsuda and T. Kunihiro, Phys. Lett. B **198** (1987) 126.

表 5.3 KM-NJL 模型によるクォークの磁気モーメント (5.144) を用いて構成子クォーク模型から得られる重粒子の磁気モーメントと実験値の比較（核磁子単位）. ただし，$u \equiv \mu_u$，$d \equiv \mu_d$，$s \equiv \mu_s$ と略記した．実験値は Particle Data Group [23] による．

重粒子	表式	理論値	実験値
P	$4u/3 - d/3$	2.80	2.79
N	$4d/3 - u/3$	−1.86	−1.91
Λ	s	−0.59	−0.61
Σ^+	$4u/3 - s/3$	2.68	2.46
Σ^-	$4d/3 - s/3$	−1.05	−1.16
Ξ^-	$4s/3 - d/3$	−0.47	−0.65
Ξ^0	$4s/3 - u/3$	−1.41	−1.25

の値である．このように定義された s クォークおよび u クォークの凝縮体の比 $\langle \bar{s}s \rangle^{NP}/\langle \bar{u}u \rangle^{NP}$ は QCD 和則を基に導き出された値 [62] とよく一致している（1 より小さいことに注意）．

表 5.2 に載っているその他の物理量についての説明は省略する（[39] 参照）．

このように，KM-NJL 模型はカイラル対称性とその自発的破れに関係した真空の性質だけではなく，擬スカラーおよびスカラーチャンネルの低エネルギーハドロンの現象を驚くほどよく記述する．

さらにこの模型は，上でも少し述べたように，カイラル対称性を尊重した 8 重項および 10 重項の重粒子の構成子クォーク模型構成のよい出発点となる*18)．すなわち，現象論的に成功した構成子クォーク模型 [22], [31], [63], [64] において必要とされる $M_u \sim 300\,\mathrm{MeV}$ および $M_s \sim 500\,\mathrm{MeV}$ という大きい質量をカイラル対称性の自発的破れによるものとする模型である．このようなダイナミカルな構成子クォーク模型はしばしばカイラルクォーク模型と呼ばれる．そのような考え方は自然なものであり古くから多くの研究者が有していたと考えられる．QCD が強い相互作用の基礎理論として提案された後の初期の明示的な研究としては文献 [65] を挙げることができる．このうち，著名なマノハー–ジョージャイの解析においては，カイラルダイナミクスは非線型シグマ模型 [20], [28] によって記述されている．

構成子クォーク模型では，ハドロンはその量子数を担うクォーク（バレンスクォークと呼ぶ）の多体系として記述される．ここでは重粒子の質量公式としてイスガー–カール（Isgur-Karl）[64] による以下のものを採用する：

$$M_B = M_0 + \sum_i^{u,d,s} \left[M_i + \frac{a}{2M_i} \right] + b \sum_{i<j} \frac{\sigma_i \cdot \sigma_j}{M_i M_j}. \tag{5.147}$$

ここで，M_0，$a/2M_i$ はそれぞれ，閉じ込めと短距離での色電気相互作用の効果

*18) T. Kunihiro and T. Hatsuda, Phys. Lett. B **240** (1990) 209.

およびi-クォークの運動エネルギーを表している．係数をbとするスピン-スピン相互作用はゲージ相互作用特有の超微細相互作用に起因するエネルギーであり,「色磁気 (color-magnetic) 相互作用」と呼ばれる．そこでの構成子クォークの質量 M_i ($i=$u, d, s) はカイラル対称性の動的な破れによってカレントクォーク質量 m_i から大きくずれている．

これらの模型のパラメーターは原理的にはシュレーディンガー方程式（あるいはファデーエフ方程式，中間子の場合は，南部–ベーテ–サルピータ方程式）を解いてハドロンの波動関数と整合的に決定されるものである．しかし，ここでは以下のような簡単な取り扱いを行う．すなわち，M_i はNJL模型によって記述されるものとする：$M_u = M_d = 335\,\mathrm{MeV}$, $M_s = 527\,\mathrm{MeV}$. この値は真空の観測量（m_π, f_π, m_K など）を再現するようにパラメーターは決定された．この描像の背景には次の作業仮説がある．すなわち，QCDの基本的なダイナミクス，すなわち，1) 短距離での漸近自由性，2) カイラル対称性の動的な破れ，そして 3) 閉じ込め，を取り入れるのにまず中間レインジでのダイナミクスである 2) を取り入れ，このようにしてダイナミカルに質量を獲得した準粒子としての構成子クォークをビルディングブロックとして他のダイナミクス 1) および 3) を取り入れる．構成子クォーク質量 300 − 500 MeV を持つ u，d，s クォークは波動関数が中間レインジに局在化しており短距離および長距離で効く 1) および 3) は摂動的に取り扱うことができる．これはあくまで作業仮説であって，その正否は得られた結果と実験値との比較によって検証される．

さらに，1) および 3) を取りいれて波動関数をあらわに解くことはやめて，ここではパラメーター M_0, a および b を陽子 P(938)，Δ(1232) および Ω(1672) の質量を再現するように決めよう．結果は以下の通りである：

$$a = (175.2\mathrm{MeV})^2, \quad M_0 = -56.4\mathrm{MeV}, \quad b = (176.4\mathrm{MeV})^3. \qquad (5.148)$$

このとき，ほかの重粒子の質量は，たとえば，以下のように与えられる：

$$\begin{aligned} \Lambda(1115) &= \ 1114, \quad \Sigma(1193) = 1186, \quad \Sigma^*(1385) = 1372, \qquad (5.149) \\ \Xi(1320) &= \ 1332, \quad \Xi^*(1507) = 1519. \end{aligned}$$

括弧の中の値は MeV 単位での実験値である．実験値との一致は誤差 1%以内で得られている．

この模型を用いて重粒子中の OZI 則の破れ，たとえば，重粒子中のバレンス以外のクォーク成分などの定量的解析を行うことができる．重粒子 B の状態ベクトル $|B\rangle$ は QCD ハミルトニアンの固有値状態であるから $H_{\mathrm{QCD}}\,|B\rangle = M_B\,|B\rangle$. ただし，$|B\rangle$ は規格化されているとする．H_{QCD} にはカレントクォーク質量が

$$\int d^3\boldsymbol{x} \sum_q m_q : \bar{q}q :$$

の形で含まれていることを考慮すると，ファインマン–ヘルマンの定理（証明は後述）より

$$\frac{\partial M_B}{\partial m_q} = \langle B| \int d^3\boldsymbol{x} \ :\bar{q}q:|B\rangle \equiv \langle \bar{q}q\rangle_B \tag{5.150}$$

を得る．NJL 模型を援用した我々の取り扱いでは，M_B の m_q-依存性は陽に求めることができる[66],[67]．その結果，たとえば，

$$\begin{aligned}
\langle \bar{u}u\rangle_P =& \ \ 4.97, \quad \langle \bar{d}d\rangle_P = 4.00, \quad \langle \bar{s}s\rangle_P = .53,\\
\langle \bar{u}u\rangle_\Lambda =& \ \ 3.63 = \langle \bar{d}d\rangle_\Lambda, \quad \langle \bar{s}s\rangle_\Lambda = 1.74,\\
\langle \bar{u}u\rangle_\Omega =& \ \ 0.72 = \langle \bar{d}d\rangle_\Omega, \quad \langle \bar{s}s\rangle_\Omega = 3.71,
\end{aligned} \tag{5.151}$$

を得る．これより，π-N シグマ項 $\Sigma_{\pi N}$ および K-N シグマ項 Σ_{KN} は以下のように与えられる：

$$\Sigma_{\pi N} = \ \hat{m}\,\langle N| : \bar{u}u + \bar{d}d : |N\rangle = 49\,\mathrm{MeV}, \tag{5.152}$$

$$\Sigma_{KN} = \ \frac{1}{2}(\hat{m} + m_s)\,\langle N| : \frac{1}{2}(\bar{u}u + \bar{d}d) + \bar{s}s : |N\rangle = 425\,\mathrm{MeV}. \tag{5.153}$$

ここで，$\hat{m} = 5.5\mathrm{MeV}$, $m_s = 135.7\mathrm{MeV}$ を用いた．また，

$$f_{T_s} \equiv \frac{m_s}{M_N}\langle \bar{s}s\rangle_N = 0.077. \tag{5.154}$$

さらに，QCD のエネルギー-運動量テンソルに関するトレース異常の公式[5] より次の表式が得られる：

$$M_B = \langle \Theta^\mu_\mu\rangle_B = \sum_{q=u,d,s,c,b,t} m_q(1+\gamma_m)\langle \bar{q}q\rangle_B + \frac{\beta}{2g}\langle F^2\rangle_B. \tag{5.155}$$

これより，重粒子中のグルーオンや重いクォークの成分の値を求めることができる．ただし，$\beta = -(11 - 2N_F/3)g^3/16\pi^2$ はベータ関数，そして γ_m は質量の異常次元である．これを用いると，たとえば，以下の値を得る（MeV の単位）：

$$-\frac{\alpha_s}{\pi}\langle F^2\rangle_P = 726, \quad \langle \bar{c}c\rangle_P = 0.045. \tag{5.156}$$

この議論を延長して，以下で与えられるヒッグス-核子結合定数 $g_{\phi NN}$ も求めることができる[67]：

$$v g_{\phi NN} = \sum_q \langle m_q \bar{q}q\rangle_N = 303\mathrm{MeV}. \quad (v = 246\mathrm{GeV}).$$

ここで得られた核子中のストレンジネス成分やチャーム成分の値は最近の多くの格子 QCD の計算結果[68] とよい一致を見る*19)．

*19)　ただし，文献 [69] で報告された核子中のストレンジネス成分値は桁違いに小さいことを付記する．決着を見るには,「海クォーク成分」の曖昧さのない定義や計算の統計を上げることが必要なのかもしれない．

ここで，ファインマン–ヘルマンの定理の証明を与えておく．ハミルトニアン H がパラメーター λ に依存しているとする：$H = H(\lambda)$.

このときのエネルギー固有値を $E(\lambda)$, 対応する規格化された固有ベクトルを $|E, \gamma\rangle$ と書くと，シュレーディンガー方程式は

$$\left(E(\lambda) - \hat{H}(\lambda)\right)|E, \gamma\rangle = 0, \quad (\langle E, \gamma|E, \gamma\rangle = 1) \tag{5.157}$$

と書ける． ここに，γ はエネルギー以外の量子数である．(5.157) のエルミート共役は

$$\langle E, \gamma|\left(E(\lambda) - \hat{H}(\lambda)\right) = 0. \tag{5.158}$$

(5.157) を λ で微分すると，

$$\left(\frac{\partial E(\lambda)}{\partial \lambda} - \frac{\partial \hat{H}(\lambda)}{\partial \lambda}\right)|E, \gamma\rangle + \left(E(\lambda) - \hat{H}(\lambda)\right)\frac{\partial}{\partial \lambda}|E, \gamma\rangle = 0. \tag{5.159}$$

これに左から $\langle E, \gamma|$ を掛け，(5.158) を用い，状態ベクトルが規格化されていることを考慮すると，

$$\frac{\partial E(\lambda)}{\partial \lambda} = \langle E, \gamma|\frac{\partial \hat{H}(\lambda)}{\partial \lambda}|E, \gamma\rangle, \tag{5.160}$$

を得る．これを，ファインマン–ヘルマンの定理という．

低エネルギーカイラル有効模型としての KM-NJL 模型の上述のような驚くべき成功の鍵は，この模型が構成子クォーク模型の場の理論版であり，構成子クォーク質量をカレントクォーク質量とカイラル対称性の動的破れにより生成された質量の和と同定することを整合的に記述できていることにある．さらに，KM-NJL 模型は以下の 2 点において伝統的な構成子クォーク模型を超える要素を備えている：すなわち，(i) この模型は真空とその上の励起状態としてのハドロンを自己無撞着に記述する．(ii) この理論では，凝縮系理論と同様に真空と中間子の集団性が適切に取り込めている．

5.6 スカラー中間子をめぐって

前に述べたように，行列式型の軸性異常項は擬スカラーだけでなくスカラーチャンネルでもフレーバー混合を引き起こす．$N_F = 3$ のときには，スカラー中間子は 9 重項を構成する可能性がある．(低質量の擬スカラー中間子は軸性異常のために 8 重項と 1 重項に分裂した.) ここでいうスカラー中間子とは，$J^{PC} = 0^{++}$，すなわち，スピンが 0，パリティ+，荷電共役 + のハドロンのことである．QCD におけるカイラル対称性とその自発的破れの文脈でシグマ中間子をはじめとするスカラー中間子の問題の重要性は 1980 年代にはじめて取

り上げられた[70].

1990年代になって，π-π 散乱のカイラル対称性，ユニタリー性，そして交差対称性を尊重した精緻な位相差解析がなされ，$I = J = 0$ チャンネルの S 行列に極が存在することが明らかにされてきた[71]．これらの現代的な解析では，交差対称性を尊重することによりシグマ中間子のチャンネル（s-チャンネル）だけではなくロー中間子（t-チャンネル）の位相差を再現することの重要さが強調された*20)．最近のより改善された解析 [72] によれば，複素エネルギー面に S 行列の極が次のように同定された：

$$M_\sigma = 441 - i272\,\mathrm{MeV}.$$

通常，この極はシグマ中間子のものと同定されている．

このような小さい質量の $J^{PC} = 0^{++}$ のスカラー中間子の存在は構成子クォーク模型から解釈することは困難が伴う[73]．この模型では，クォークあるいは反クォークは構成子質量 $M_i\,(i = \mathrm{u},\ \mathrm{d},\ \mathrm{s}, \ldots)$ を持ち，閉じ込めポテンシャル $V(r)$ に閉じ込められている[31]．閉じ込めポテンシャルとして，たとえば，調和振動子型 $V(r) = \frac{M_i\omega^2}{2}r^2$ を取ってみよう．中間子はクォークと反クォークから構成される．クォークと反クォークは互いに逆のパリティを持つ．したがって，パリティをプラスにするには相対の角運動量は奇数でなければならない．一番低い角運動量は $l = 1$，すなわち，p 波である．この場合，全角運動量を0にするには，非相対論的模型では $^3P_0$ となる．u, d クォークの構成子質量は 330 MeV ほどであるから，それだけで 660 MeV あり，これに $\hbar\omega$ の励起エネルギーが付与されるので，$^3P_0$ 状態の中間子の質量は通常 1.2–1.6 GeV になる．

構成子クォーク質量を前提として，600 MeV ほどの質量のスカラー中間子状態を実現するためのいくつかの機構が提案されている．一つは，ダイクォーク (d) -反ダイクォーク ($\bar{d}$) からなるテトラクォーク構造を持つというものである．これは，1976年にジャッフィによって提案された[74]：ジャッフィの研究はクロースの教科書 [31] でも解説されている．ジャッフィは d-$\bar{d}$ 間のカラー磁気相互作用が非常に大きい引力を与え，$330 \times 4 \simeq 1.3\,\mathrm{GeV}$ の質量がこの引力のために 600 MeV あたりまで下がることを示した．ただし，相互作用を評価するために用いたハドロンの波動関数は MIT バッグ模型[75] を用いた．このダイクォーク-反ダイクォーク模型（テトラクォーク模型）に基づく，1 GeV 以下のスカラー中間子に関する研究は現在もっとも盛んに行われている[76].

より歴史を持つアイデアは南部[11] によるものであり，NJL 模型の計算結果に基礎を置いている．すでに前章でも見たように，この模型ではシグマ中間子はパイ中間子のカイラルパートナーとして必然的に現われ，その質量はカイラル極限では構成子クォーク質量の2倍，すなわち，660 MeV ほどになる*21)．そ

*20) K. Igi and K. i. Hikasa, Phys. Rev. D **59** (1999), 034005.

*21) T. Hatsuda and T. Kunihiro, Prog. Theor. Phys. **74** (1985), 765. オリジナルの

してこのことは軸性異常を取り入れた$N_F=3$の場合でも変わりはない[39]．この場合，u，d セクターと s セクターの混合が起こりうるが，スカラーチャンネルでは KMT 項の効き方は擬スカラーチャンネルとは逆になるので，むしろほとんど理想混合が実現されるのである[52]．この質量の起源はカイラル極限でパイ中間子がゼロ質量になるのと同じ機構であることは強調に値する．カイラル対称性が自発的に破れた結果，カイラルオーダーパラメーターは2種の量子揺らぎを持つ．一つはその位相揺らぎであり，これは振動というよりも回転モードでありパイ中間子に対応する．もう一つはカイラルオーダーパラメーターの振幅揺らぎであり，これがシグマ中間子に対応する．すなわち，シグマ場は二重の役割を果たしている．カイラル相転移の秩序変数としての役割とその量子揺らぎがシグマ中間子というハドロン励起を記述している．このシグマ場の役割は，ワインバーグ–サラム模型（標準模型）におけるヒッグス場の役割と同じである[77]：**ヒッグス場**の期待値回りの量子揺らぎが**ヒッグス粒子**である．この意味で，**シグマ中間子は QCD におけるヒッグス粒子**と言える．その存在の有無は標準模型におけるヒッグス粒子の存在の意味の大きさと同様の重要さを QCD において持っていると言える．

シグマ中間子はパイ-パイ散乱の共鳴として実現するのであるから，たとえば，「カイラルユニタリー模型」の成功[78]が示唆するようにその波動関数は少なくともパイ-パイの成分も有している*22)．

現実のシグマ中間子は，その振幅がエネルギー-運動量に依存したこれら (1) π-π，(2) テトラクォーク，(3) q-q̄ 集団モード，および (4) グルーオンのみからできた（仮想的）粒子，すなわち，グルーボールの成分の重ね合わせであろう．これらの効果をすべて（原理的に）取り入れることのできる非摂動的な方法は，いわゆる，フル QCD の格子シミュレーションである[79]．シグマ中間子を含むスカラー中間子に関する格子 QCD による計算は現在盛んに行われている．

5.7　6 クォーク相互作用と H ダイバリオン

KMT 項はカイラル対称性が自発的に破れた世界においても正規積として (5.129) で表される 6 体相互作用を生み出す．この特異な 6 クォーク相互作用が，1977 年にジャッフィによりその存在が示唆された H ダイバリオンと呼ばれるエキゾティックなハドロン[80]の存在の有無に関係するかもしれない．H ダイ

NJL の論文ではフェルミオンは核子に割り当てられていることに注意．NJL 模型を QCD の有効模型として意識的に用いることによって，構成子クォーク質量 $M_q \sim 300\,\mathrm{MeV}$ とともにシグマの質量が 600MeV 程度になることはこの論文で初めて示された．

*22)　カイラルユニタリー模型はカイラル対称性の線型表現，たとえば線型シグマ模型からシグマ中間子の自由度を抑制してえられる非線型シグマ模型から出発し，ある手法で NG ボソン-ループを再総和して散乱振幅を構成するハドロン散乱の「模型」である．閾値付近のハドロン共鳴の記述に有効であることが知られている．

バリオンは，u，d，s クォークを 2 個ずつ含む重粒子数 2 の仮想的なハドロンである．重粒子数が 2 なので，dibaryon（ダイバリオン）と呼ばれる．量子数としては Λ-Λ や N-Ξ あるいは Σ-Σ などと同じである；QCD と H ダイバリオンについての 1990 年代中ごろまでのまとめについては文献 [81] を参照．ジャッフィは，1 グルーオン交換相互作用から導かれるカラー磁気相互作用[31] がダイクォーク状態に引力的に作用するという特異な性質に注目した．そこでは波動関数としてスカラー中間子の計算と同様，MIT バッグ模型が用いられた．H ダイバリオンチャンネルへの KMT 項*23) の影響はクォーク構成子模型（クォーククラスター模型）に基づいて解析され，KMT 項は H ダイバリオンのチャンネルで正味には斥力的な役割を果たすことが示されている[82]．それでも，N-Ξ の閾値よりも下のエネルギー領域で共鳴として存在する可能性はある．最近，フレーバー対称の極限での格子計算[83] がその存在を示唆する結果を与えたこともあり，H ダイバリオンの存在の有無はふたたび注目されている．実験の現状については文献 [84] およびこれを引用している論文を参照のこと．

*23) この場合特に，インスタントン誘起クォーク間相互作用: Instanton-Induced Interaction（「III」と略記される）と呼ばれた[82]．

第 6 章
有限温度・密度の場合

6.1 はじめに

6.1.1 有限温度・密度での真空の相転移

温度や圧力を変えると水の形態が変わることはよく知られている．固体（氷）になったり液体（水）になったりそして気体（蒸気）になったりすること，すなわち，相転移をする．対称性が自発的に破れた状態はいわゆる「秩序状態」であり，エントロピーが小さい状態である．つまり，ヘルムホルツの自由エネルギー $F = U - TS$ で考えた場合，F を小さくするために，内部エネルギー U をできるだけ小さくした状態である．温度 T を上げていくと，エントロピー S を大きくした方が F が小さくなるので，秩序状態が壊れて U が大きくなった状態が実現する．こうして高温では対称性が回復する[85]~[87]．注意すべきことは，相転移は相互作用の非摂動的な効果として起こることである．いくら摂動的に高次の計算をしても有限次である限り相転移を記述することはできない．

場の理論としての QCD の真空はカイラル対称性が自発的に破れた秩序状態であり，その NG ボソンとして湯川のパイ中間子が存在することはすでに述べた．したがって，温度を上げていくとカイラル対称性が回復していくことが予想される．さらに，QCD においてはその漸近自由性のために，大きい値を持つエネルギーの次元を持つ外部変数，たとえば，運動量や温度，化学ポテンシャル，が存在するとき，QCD の結合定数は「ゆっくりと」小さくなっていき，相互作用エネルギーは減少していき対称性の回復が助長されるであろう．ただし，弱結合だからといって相転移が起こらないわけではないことは注意すべきである．超伝導の BCS 理論[8] は弱結合の理論であり，変分的取り扱い（それは自己無撞着平均場理論と同値）により結合定数について無限次の足し合わせを行っている．QCD におけるカラー超伝導[88],[89] の取り扱いも同様である．また，カラー自由度を持つクォークやグルーオンの閉じ込めも本質的に非摂動効果と考えられている[3],[6] ので，高温・高密度では**非閉じ込め相**が実現すると考えられ

る[90]~[92]．したがって，たとえば高温にしていくと，ハドロンが「溶けて」質量をほとんど失ったクォークとグルーオンがほとんど自由になった状態が実現すると考えられている．そのような「クォークとグルーオンのスープ状態」にある物質は**クォーク・グルーオンプラズマ (Quark-Gluon Plasma; QGP)** と呼ばれている．プラズマという名前がついているのは，普通の物質のイオン化との類似性からである．

環境の変化に伴う QCD 真空の変化およびそれに伴うその変更された真空上での素励起としてのハドロンの性質の変化を探る問題は現在多くの研究者の興味の的になっている．

6.1.2 超高密度の世界：中性子星の内部構造

重力エネルギーを用いて水素，ヘリウムと核融合を繰り返して最も安定な鉄の原子核まで行きつくと，星の進化が終わって超新星爆発を起こし，その残骸として超高密度の天体が形成される．中ぐらいの星の崩壊では中性子星が形成される：もっと重い星の崩壊ではブラックホールができる，と考えられる．どういう星の場合に中性子星になり，どういう星の場合ブラックホールになるかということを理論的に予言することは複雑で難しい問題である．

中性子星は半径が 10 キロほどで，内部の密度は原子核の 5 倍から 10 倍，質量は太陽のおよそ 1.4 倍であるものが多い*1)．その内部構造は以下のようであると考えられている[93],[94]：外殻は中性子の海があって大きな原子核がある．そこでは，中性子の集団が $^1S_0$ の超流動になっている．より内側に行くほどより高密度になる．そこでは，核力のエネルギー依存性を反映して中性子「液体」は $^3P_2$ 対の超流動状態になっている．もっと内部ではベータ崩壊によりストレンジネスを含む重粒子（ハイペロン）が存在するようになる．また，パイ中間子凝縮という状態が実現されている可能性も指摘されている．中心部では，より高密度になってクォーク物質になっているかもしれない．クォーク物質がフェルミ液体[86] として記述されるならば，カラー超伝導が実現されているだろう[89]．しかし，これらはまだ理論的予想にとどまっていて，観測による検証を待っている．

6.1.3 超高温の世界

普通の物質の場合は，高温になると原子に含まれていた一部あるいはすべての電子がはぎ取られて自由に動き出し，プラズマ状態になる．ハドロンの場合も，たとえば中間子のガスになっている状態から 10 億度とか 100 億度とかの超高温になると，上で述べたようにクォーク・グルーオンプラズマ状態になると考

---

*1) 最近，太陽の 2 倍ほどの質量の中性子星の存在が以下の論文で報告発見され大きな話題になっていることを付記する：P. Demorest, T. Pennucci, S. Ransom, M. Roberts and J. Hessels, Nature **467** (2010) 1081.

えられている．このような状態は宇宙創成後 10^{-5} 秒後ごろに実現したであろう [92]．また，そのような状態を地上で作ることを目指して，アメリカのブルックヘブン国立研究所で原子核を光速の99.7%の速さまで加速して衝突させる実験が行われている．それを行う加速器を相対論的重イオン衝突器（Relativistic Heavy-Ion Collider; RHIC）という．また，ヨーロッパ原子核研究センター（CERN）における Large Hadron Collider（LHC）も稼働し興味深いデータを提供している [95],[96]．そのような高速の原子核は平な円盤のように見える：原子核は通常は球形かそれに近い形をしているが，相対性理論が教えるところによれば，これだけ高速だとローレンツ収縮して平らな円盤のようになる．この平な原子核円盤同士がぶつかるとそれを構成するクォークやグルーオンが強烈なインパクトで衝突し，運動エネルギーが熱に変換されて超高温のクォークとグルーオンの「スープ」，すなわちクォーク・グルーオンプラズマ，ができると考えられる．これが膨張していって，最後には冷えてまたハドロンに戻って，最後に飛び散ったハドロンが計測される，ということになる．

このRHICの実験によってすでに多くの興味深いことが見つかっている*2)．クォークやグルーオンの高エネルギーでの衝突により「ジェット」という現象が生じる．ある決まった2つ（または3つ）の方向に粒子が集中して出てくる現象である．まわりに何もない真空でそれが起こると，ジェットはお互い反対方向に出るが，原子核の表面付近でジェットを作る衝突が起こると，表面と反対方向に出ていこうとする粒子は，そこが非常に超高温の高エネルギー密度の状態であるから，(部分的に）吸収されてしまうと考えられる．すると，ジェットが見えるけれども一つしかない，ということになると予想されるが，実際，一つの非常に高エネルギーのハドロンのジェット（モノジェット）しか見えないということが観測されている．その他にも，クォークやグルーオンあるいはハドロンの集団としての運動がほとんど粘性のない流体（完全流体）として振る舞うことも発見されている．流体の粘性が小さいというのはその流体を構成している構成粒子が非常に強く相互作用している，強相関である，ということを意味する [87]．このように，クォーク・グルーオンプラズマという新しい物質の状態が生成された可能性が高いだけでなく，新たな予想もしないいろいろな現象が発見され，したがって，いろいろな謎が生まれてきた，というのが現状である．

この章では，有限温度・密度でのカイラル相転移とそれに関連した集団モード（中間子励起）に焦点を当てて，カイラル有効模型を用いた解説を行う．ここではまず，有限温度 $T = 1/\beta$，密度の場合を取り扱うために，有限温度の場の理論 [41] の簡単な導入を行う．この理論を用いて熱平衡状態での熱力学ポテンシャルを計算し相図を求める．次に線型応答の考えで中間子モードのスペク

*2) たとえば以下のサーベイを参照のこと：Y. Akiba, Prog. Theor. Phys. Suppl. **187** (2011) 55．LHC の最初の 1 年の成果については [96] を参照．

トル関数および分散関係を求める．ただし，紙数の関係から導入的な議論に留め，励起モードについての詳しい解析は文献 [39] に譲ることにする．

6.2 有限温度の場の理論入門

系のハミルトニアンを H としよう．粒子数 N が定まった値を取らず期待値でのみ指定できる場合は化学ポテンシャル μ を導入して $K = H - \mu N$ を用いる．

6.2.1 統計熱平均

任意の演算子 O の温度 T における統計熱平均 $\langle\langle O\rangle\rangle$ は

$$\langle\langle O\rangle\rangle \equiv Z^{-1}\mathrm{Tr}[\mathrm{e}^{-\beta K}O], \qquad (k_{\mathrm{B}} = 1) \tag{6.1}$$

と書ける．Z は大分配関数であり，熱力学ポテンシャル $\Omega(T,\,\mu)$ は

$$Z = \mathrm{Tre}^{-\beta K} = \mathrm{e}^{-\beta\Omega} \tag{6.2}$$

で定義される．すなわち，

$$\Omega(T,\,\mu) = -T\ \ln\, Z. \tag{6.3}$$

6.2.2 虚時間形式：松原グリーン関数

虚時間形式の有限温度の場の理論は，シュレーディンガー描像の演算子 $O_S(\boldsymbol{x})$ に対して次の「虚時間 τ」で時間推進されるハイゼンベルグベルグ演算子 $O_K(\tau, \boldsymbol{x})$ の導入により展開される：

$$O_K(\tau, \boldsymbol{x}) := \mathrm{e}^{K\tau} O_S(\boldsymbol{x}) \mathrm{e}^{-K\tau}. \tag{6.4}$$

次の虚時間についての時間順序積を松原グリーン関数という：

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta}(\tau, \boldsymbol{x}; \tau', \boldsymbol{x}') := -\langle\langle \mathrm{T}_\tau \psi_{K\alpha}(\tau, \boldsymbol{x}) \bar{\psi}_{K\beta}(\tau', \boldsymbol{x}')\rangle\rangle. \tag{6.5}$$

ここで，T_τ は虚時間の時間順序積を取る記号である；ただし，時間の定義域は，

$$0 < \tau, \tau' < \beta.$$

松原グリーン関数はそのフーリエ級数展開に特徴が表れる．その導出においては，跡（トレース）と演算子の交換関係を用いて得られる次の境界条件が基本的である：

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta}(0, \boldsymbol{x}; \tau', \boldsymbol{x}') = \mp\mathcal{G}_{\alpha\beta}(\beta, \boldsymbol{x}; \tau', \boldsymbol{x}'), \quad \mathcal{G}_{\alpha\beta}(\tau, \boldsymbol{x}; 0, \boldsymbol{x}') = \mp\mathcal{G}_{\alpha\beta}(\tau, \boldsymbol{x}; \beta, \boldsymbol{x}'). \tag{6.6}$$

上（下）の符号はフェルミオン（ボソン）に対してのものである．この反周期性（周期性）は久保–マーティン–シュインガー (KMS) 条件と呼ばれる．ハミルトニアンが時間に依存しなければ，$\mathcal{G}_{\alpha\beta}(\tau,\boldsymbol{x};\tau',\boldsymbol{x}')$ は時間の差 $\tau-\tau'$ $(-\beta<\tau-\tau'<\beta)$ のみの関数である：

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta}(\tau,\boldsymbol{x};\tau',\boldsymbol{x}')=\mathcal{G}_{\alpha\beta}(\tau-\tau';\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}').$$

さらに，KMS 条件から

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta}(\tau-\tau';\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')=\mp\mathcal{G}_{\alpha\beta}(\tau-\tau'+\beta;\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'), \tag{6.7}$$

を得る．

こうして，$\mathcal{G}$ のフーリエ変換は

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta}(\tau;\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')=T\sum_{n=\text{integer}}\mathrm{e}^{-i\nu_n\tau}\mathcal{G}_{\alpha\beta}(\nu_n;\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'), \tag{6.8}$$

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta}(\nu_n;\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')=\int_0^\beta d\tau\mathcal{G}_{\alpha\beta}(\tau;\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'), \tag{6.9}$$

となる．ただし,「周波数」ν_n は,

$$\nu_n=(2n+1)\pi T\equiv\nu_n^F,\quad \text{フェルミオンの場合,} \tag{6.10}$$

$$\nu_n=2n\pi T\equiv\omega_n^B,\quad \text{ボソンの場合,} \tag{6.11}$$

となる．これら離散周波数は松原周波数と呼ばれる．

簡単な例として，自由ディラック場のグリーン関数を求めてみよう．虚時間形式でのディラック場 $\psi_K(\tau,\boldsymbol{x})$ は次のように書ける：

$$\psi_K(\tau,\boldsymbol{x})=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{p}r}\sqrt{\frac{M}{E_p}}[a_{\boldsymbol{p}r}(\tau)u^{(r)}(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}+b^\dagger_{\boldsymbol{p}r}(\tau)v^{(r)}(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}]. \tag{6.12}$$

ここに,

$$a_{\boldsymbol{p}r}(\tau)=a_{\boldsymbol{p}r}\mathrm{e}^{-e_{\boldsymbol{p}}^{(-)}\tau},\quad b^\dagger_{\boldsymbol{p}r}(\tau)=b^\dagger_{\boldsymbol{p}r}\mathrm{e}^{e_{\boldsymbol{p}}^{(+)}\tau}. \tag{6.13}$$

ただし，$e_{\boldsymbol{p}}^{(\pm)}=E_p\pm\mu$. 同様に,

$$a^\dagger_{\boldsymbol{p}r}(\tau)=a^\dagger_{\boldsymbol{p}r}\mathrm{e}^{e_{\boldsymbol{p}}^{(-)}\tau},\quad b_{\boldsymbol{p}r}(\tau)=b_{\boldsymbol{p}r}\mathrm{e}^{-e_{\boldsymbol{p}}^{(+)}\tau}$$

である．

これらを用いて松原グリーン関数は直接的な計算で

$$\mathcal{G}(\nu_n,\boldsymbol{p})=\frac{1}{\tilde{p}_+\cdot\gamma-M}\equiv\mathcal{G}^0(\nu_n,\boldsymbol{p}), \tag{6.14}$$

と求まる．ただし,

$$\tilde{p}_+^\alpha=(i\nu_n+\mu,\boldsymbol{p}),\quad(\alpha=0,1,2,3). \tag{6.15}$$

6.2.3 松原グリーン関数と統計熱平均

松原グリーン関数を用いると任意の演算子 O の大正準集団についての統計熱平均を求めることができる．$\psi = q$ をクォーク場とし次の演算子を考えよう：

$$O = \bar{q}(\tau, \boldsymbol{x})\,\Gamma\, q(\tau, \boldsymbol{x}') = \bar{q}_\alpha(\tau, \boldsymbol{x})\,\Gamma_{\alpha\beta}\, q_\beta(\tau, \boldsymbol{x}').$$

ここに，Γ はカラー，フレーバーあるいはスピンについての任意の積行列であり，α, β はそれらの行列成分の添え字をまとめて表している．このとき，

$$\begin{aligned}\langle\langle \bar{q}(\tau, \boldsymbol{x})\,\Gamma\, q(\tau, \boldsymbol{x}')\rangle\rangle &= -\lim_{\tau'\to\tau+} \Gamma_{\alpha\beta}\,\langle\langle \mathrm{T}_\tau\, q(\tau, \boldsymbol{x}')_\beta \bar{q}(\tau, \boldsymbol{x})_\alpha\rangle\rangle \\ &= \Gamma_{\alpha\beta} \lim_{\eta\to 0+} \mathcal{G}_{\beta,\alpha}(-\eta, \boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}) \\ &= \mathrm{Tr}\,\Gamma \lim_{\eta\to 0+} \int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3} \mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})} \\ &\qquad \times T \sum_n \mathrm{e}^{i\nu_n\eta}\mathcal{G}(\nu_n, \boldsymbol{k})\end{aligned} \tag{6.16}$$

となり，確かに O の統計熱平均が松原グリーン関数を用いて表されている．結局，有限温度の場合も多くの理論計算は（松原）グリーン関数を求めることに帰着されることが分かる．

6.3 相図の決定：熱力学ポテンシャルとギャップ方程式

有限温度での熱平衡状態は熱力学ポテンシャル Ω を最小にする状態である．平均場近似で熱力学ポテンシャルを求めて，有限温度・密度でのカイラル相転移について議論する．

$\langle\langle \bar{q}q\rangle\rangle$ が存在することを仮定して，$(\bar{q}q)^2 \to 2\langle\langle \bar{q}q\rangle\rangle\,\bar{q}q$ と近似すると，K は下記の K_{MFA} に近似される：

$$\begin{aligned}K_{\mathrm{MFA}} &= H_{\mathrm{MFA}} - \mu : N : \\ &= \int d^3\boldsymbol{x} \{\bar{q}(\boldsymbol{x})[-i\gamma\cdot\nabla + M]q(\boldsymbol{x}) + m_0^2/2\cdot\sigma_0^2\} - \mu : N : .\end{aligned} \tag{6.17}$$

ここに，

$$-m_0^2/G\cdot\sigma_0 = \langle\langle \bar{q}q\rangle\rangle, \tag{6.18}$$

である．この真空凝縮体 σ_0 はこの時点では未定であり，自己無撞着に決定すべきものである．

粒子数演算子 N は正規積とし，真空の寄与を差し引いている．あるいは，パウリの処方

$$\bar{q}\gamma^0 q \;\to\; \frac{1}{2}\,[\bar{q}, \gamma^0 q] \tag{6.19}$$

を用いて定義すれば，真空の寄与の差っ引きは自動的になる．

$H_{\rm MFA}$ は通常のディラックハミルトニアンに定数項が加わっただけなので簡単に対角化できている．結局，

$$\begin{aligned} K_{\rm MFA} = & N_c \sum_{\boldsymbol{k},r} (e_k^{(-)} a_{\boldsymbol{k}r}^\dagger a_{\boldsymbol{k}r} + e_k^{(+)} b_{\boldsymbol{k}r}^\dagger b_{\boldsymbol{k}r}) \\ & -N_c \sum_{\boldsymbol{k},r} e_k + m_0^2/2 \cdot \sigma_0^2 V, \end{aligned} \tag{6.20}$$

となる．したがって，この近似のもとでの熱力学ポテンシャルは

$$\begin{aligned} \Omega_{\rm MFA}(M) = & -T \ln {\rm Tr} e^{-K_{\rm MFA}/T} \\ = & -N_c \sum_{\boldsymbol{k},r} e_k + \frac{m_0^2 \sigma_0^2}{2} V \\ & -2N_c T \sum_{\rm k} \{ \ln(1 + {\rm e}^{-e_{\rm k}^{(-)}/T}) + \ln(1 + {\rm e}^{-e_{\rm k}^{(+)}/T}) \}. \end{aligned} \tag{6.21}$$

これを $M = G\sigma_0$ の関数と見て，その最小値を与える $M = G\sigma_M$ がその温度 T と化学ポテンシャル μ での熱平衡値である．最小値は停留条件

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_0} \Omega_{\rm MFA} \Big|_{\sigma_0 = \sigma_M} = 0, \tag{6.22}$$

を満たす．この停留条件は形式上 (6.18) に一致し，自己無撞着にカイラル凝縮体を決定する条件になっている．

この自己無撞着条件を具体的に計算してみよう．(6.16) を用いるとカイラル凝縮体の統計熱平均は次のように計算できる：

$$\begin{aligned} \langle\langle \bar{q}(x) q(x) \rangle\rangle & = -{\rm Tr} \lim_{y \to x+} \langle\langle T_\tau q(x) \bar{q}(y) \rangle\rangle \\ & = {\rm Tr} \lim_{\eta \to 0+} \mathcal{G}^{(0)}(0-, \boldsymbol{0}) \\ & = {\rm Tr} \lim_{\eta \to 0+} \int \frac{d^3 \boldsymbol{k}}{(2\pi)^3} T \sum_n {\rm e}^{i\nu_n \eta} \mathcal{G}^{(0)}(\nu_n, \boldsymbol{k}) \\ & = 2N_c \lim_{\eta \to 0+} \int \frac{d^3 \boldsymbol{k}}{(2\pi)^3} T \sum_n \frac{M}{E_k} {\rm e}^{i\nu_n \eta} \left[\frac{1}{i\nu_n - e_k^{(-)}} - \frac{1}{i\nu_n + e_k^{(+)}} \right]. \end{aligned} \tag{6.23}$$

ここでさらに，公式[41]

$$T \sum_n \frac{{\rm e}^{i\nu_n \eta}}{i\nu_n - x} = \frac{{\rm e}^{i\nu_n \eta}}{{\rm e}^{x/T} + 1}, \tag{6.24}$$

を用いると，

$$\langle\langle \bar{q}(x) q(x) \rangle\rangle = 2N_c \int \frac{d^3 \boldsymbol{k}}{(2\pi)^3} \frac{M}{E_k} [-1 + n(E_k) + \bar{n}(E_k)], \tag{6.25}$$

と求まる．ただし，

$$n(x) = 1/[\mathrm{e}^{(x-\mu)/T} + 1], \quad \bar{n}(x) = 1/[\mathrm{e}^{(x+\mu)/T} + 1]$$

はそれぞれ，粒子と反粒子のフェルミ–ディラック分布関数である．したがって，自己無撞着に質量 M およびクォーク凝縮体 $\langle\langle\bar{q}q\rangle\rangle$ を決める有限温度のギャップ方程式は，

$$\begin{aligned} M &= -2g\langle\langle\bar{q}q\rangle\rangle \\ &= 2N_c \int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3} \frac{M}{E_k}[-1 + n(E_k) + \bar{n}(E_k)], \end{aligned} \tag{6.26}$$

となる．ここで，第 1 項は真空，すなわち，負エネルギーの「ディラックの海」の寄与であり負の値である．一方，第 2，3 項は熱的に励起したクォークと反クォークの寄与であり，正の値を取る．正エネルギーのクォークの寄与は，行列要素

$$\frac{M}{E_k}\bar{u}u = \frac{M}{E_k}$$

に熱分布関数が掛かったものとなっている．反クォークの寄与は，負エネルギー状態の寄与

$$\frac{M}{E_k}\bar{v}v = -\frac{M}{E_k}$$

が熱励起で無くなるので，正の行列要素と反クォークの熱分布関数がかかったものとなっている．このように，温度の効果はクォーク凝縮体の絶対値を減少させる．ここで扱っている系は閉じ込め効果のないクォーク多体系であるが，後に示すように，有限温度でカイラル凝縮体が減少することは模型によらず，ファインマン–ヘルマンの定理 [97] を用いてハドロンガス，たとえば，パイ中間子気体，に対しても示すことができる [98]．

温度 0 で有限密度の場合はどうであろうか？ $T \to 0+$ のとき，

$$n(E_k) \to \theta(\mu - E_k), \quad \bar{n}(E_k) \to 0$$

だから，

$$\langle\langle\bar{q}(x)q(x)\rangle\rangle = 2N_c \int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3} \frac{M}{E_k}[-1 + \theta(\mu - E_k)], \tag{6.27}$$

となる．ここで，

$$\mu = \sqrt{M^2 + k_F^2}$$

によって，フェルミ運動量 k_F を導入すれば，第 2 項は（正エネルギー状態の）フェルミ球からの寄与であることが見て取れる．正エネルギー解のスピノルは

$$\bar{u}u = 1 > 0$$

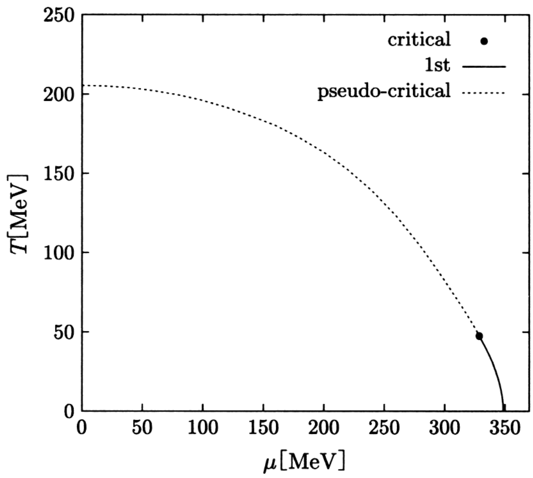


図 6.1 カイラル相転移の相図．critical は臨界点を表す．低温領域の実線は 1 次相転移の臨界線である．温度を上げていくと，1 次相転移は臨界点で 2 次相転移になり，その後クロスオーバーになる．(根本幸雄氏の計算による．)

のように正に規格化されていることに注意すると，フェルミ球にある粒子はクォーク凝縮体に対して正の寄与をし，真空の寄与と相殺するように働くことが分かる．

数値計算の結果の例を図 6.1 に示す．低温領域の実線は 1 次相転移の臨界線である．原点を含む低温かつ低密度 (化学ポテンシャル) 領域がカイラル対称性が破れた領域である．温度を上げていくと，1 次相転移は臨界点 (Critical Point：CP) で 2 次相転移になり，その後クロスオーバーになる．この臨界点の存在はさまざまのカイラル有効模型で示されており [100]，「QCD 臨界点」と呼ばれている*3)．

6.4 ファインマン–ヘルマンの定理を用いた議論

QCD のハミルトニアンを H_{QCD} と書く．H_{QCD} はフレーバー f のクォークのカレント質量 m_f を $-m_f\bar{q}_f q_f$ の形で含んでいる．このことに注意すると，有限温度によるクォーク凝縮体の変化は次のように与えられることが分かる [98]：

$$\begin{aligned}\delta\langle\langle\bar{q}_f q_f\rangle\rangle &\equiv \langle\langle\bar{q}_f q_f\rangle\rangle - \langle\bar{q}_f q_f\rangle \\ &= \frac{1}{Z}\mathrm{Tr}\left[\bar{q}q\ \mathrm{e}^{-H_{\mathrm{QCD}}/T}\right] \\ &= \frac{\partial F(T)}{\partial m_f}. \qquad (6.28)\end{aligned}$$

ただし，F は真空のエネルギーを含まないヘルムホルツの自由エネルギーであ

*3) カイラル有効模型による臨界点の存在は [99] で初めて報告された．カラー超伝導を考慮した場合のカイラル模型による研究の比較的最近の状況は文献 [101] からトレースすることができる．

る．今，温度があまり高くなく，系が相互作用の無視できるパイ中間子気体でよく近似できるとすると，

$$\begin{aligned} Z \simeq Z_{\pi-\mathrm{gas}} &= 3\sum_{\boldsymbol{k}} \mathrm{e}^{-\sqrt{m_\pi^2+k^2}/T}, \\ \Omega = F \simeq F_{\pi-\mathrm{gas}} &= 3T\sum_{\boldsymbol{k}} \ln(1-\mathrm{e}^{-\beta E_\pi(k)}), \end{aligned} \tag{6.29}$$

となる．ただし，3 はパイ中間子のアイソスピン自由度であり，$E_\pi(k) = \sqrt{m_\pi^2+k^2}$ は運動量 k を持った 1 パイ中間子のエネルギーである．

すると，u-クォーク凝縮体の変化は

$$\delta\langle\langle\bar{u}u\rangle\rangle \simeq \frac{\partial F_{\pi-\mathrm{gas}}}{\partial m_u} = 3\sum_{\boldsymbol{k}} \frac{\partial E_\pi(k)}{\partial m_u} n_\pi(k), \tag{6.30}$$

と求まる．ここに，$n_\pi(k) = 1/[\mathrm{e}^{E_\pi(k)/T}-1]$ はパイ中間子の熱分布関数である．ここに現れた微分は，ファインマン–ヘルマンの定理を用いると，運動量 k を持つパイ中間子中の $\bar{u}u$ の期待値 $\langle\pi(k)|\bar{u}u|\pi(k)\rangle$ と同定できる．すわなち，

$$\frac{\partial E_\pi(k)}{\partial m_u} = \frac{m_\pi}{E_\pi(k)}\frac{\partial m_\pi}{\partial m_u} = \langle\pi(k)|\bar{u}u|\pi(k)\rangle. \tag{6.31}$$

したがって，(6.30) は次のように書き換えられる：

$$\delta\langle\langle\bar{u}u\rangle\rangle \simeq 3\sum_{\boldsymbol{k}} \langle\pi(k)|\bar{u}u|\pi(k)\rangle n_\pi(k). \tag{6.32}$$

これは，温度 T での凝縮体の変化は熱的に励起されたパイ中間子の持つ凝縮体の値に熱分布関数を乗じたものであり，物理的意味は明快である．

定量的にはゲルマン–オークス–レンナー関係式

$$m_\pi^2 \simeq \hat{m}/f_\pi^2 \cdot \langle\bar{u}u+\bar{d}d\rangle_0, \quad (\hat{m} = (m_u+m_d)/2),$$

を用いて近似的に評価することができる．このとき，この関係式中の物理量はすべてカイラル極限の値であることに注意する．これより，

$$\langle\pi(0)|\bar{u}u|\pi(0)\rangle \simeq \langle\pi(0)|\bar{d}d|\pi(0)\rangle \simeq \frac{\partial m_\pi}{\partial\hat{m}} \simeq \frac{m_\pi}{m_u+m_d} = 7 \sim 10 > 0 \tag{6.33}$$

と見積もられる．この値が正のため，有限温度のパイ中間子気体ではカイラル相転移の秩序変数の期待値 $\langle\langle\bar{q}q\rangle\rangle$ の絶対値が減少し，カイラル対称性が回復していくことが分かる．

ここで得られた結果の直観的な理解を与えておこう．有限温度のパイ中間子気体おける秩序パラメーターを求めるために演算子 $\bar{q}q(x) = O(x)$ を計測（プローブ）することを考えよう．このときプローブ $O(x)$ は真空にヒットする場合もあるし，確率 $n_\pi(k)$ で熱的に励起している運動量 k を持つパイ中間子にヒットする場合もある．前者の場合には真空での値 $\langle\bar{q}q\rangle$ が得られ，後者の場合には

パイ中間子中の $\bar{q}q$ の正の行列要素（期待値）が得られ，これが真空の値からのずれを与える．これが (6.32) である．この議論から分かるように，O はどんな演算子でもよい．比較的低温度での観測量 O の真空期待値からのずれは (6.32) において，

$$\langle\pi(k)|\bar{u}u|\pi(k)\rangle \;\rightarrow\; \langle\pi(k)|O|\pi(k)\rangle,$$

と置き換えればよい．ただし，以上はパイ中間子間の相互作用が無視できる場合であることに注意する．

より高温になって熱的に励起されているパイ中間子の数が増えるとその間の相互作用が無視できなくなる．そのような相互作用の効果を取り入れた計算が $N_F = 2$ のカイラル極限の場合になされている[98]．

6.5 有限バリオン密度の場合

有限密度の場合のカイラル凝縮体 $\langle\bar{q}q\rangle$ の振る舞いに対してもファインマン–ヘルマンの定理は厳密な表式を与える．すなわち，

$$\langle\Psi|\bar{q}q|\Psi\rangle = \frac{\partial\langle\Psi|\mathcal{H}_{\rm QCD}|\Psi\rangle}{\partial m_q}. \tag{6.34}$$

この表式は QCD ハミルトニアン

$$H_{\rm QCD} = \int d^3\boldsymbol{x}\mathcal{H}_{\rm QCD}$$

の任意の固有状態 $|\Psi\rangle$ に対して成立する．ただし，$\langle\Psi|\Psi\rangle = 1$ と規格化されているものとする．$|\Psi\rangle = |{\rm nm}\rangle$ が温度 0 の核物質状態であるとすると，エネルギー密度は

$$\langle{\rm nm}|\mathcal{H}_{\rm QCD}|{\rm nm}\rangle = E_{\rm vac} + n_B[M_N + E_{\rm b.}], \tag{6.35}$$

と与えられる．ここに，$E_{\rm vac}$ は真空のエネルギー密度，M_N は核子の静止質量，$E_{\rm b}$ は核物質の 1 粒子あたりの結合エネルギーである．有限温度の場合と同様に，ファインマン–ヘルマンの定理を適用してみよう．まず，(6.35) の第 1 項の m_q 微分は真空のカイラル凝縮体 $\langle\bar{q}q\rangle_0$ を与える．また，前章で議論したように，次の M_N の m_q 微分は核子中のスカラー密度を与える：

$$\frac{\partial M_N}{\partial m_q} = \langle N| :\bar{q}q: |N\rangle. \tag{6.36}$$

さらに，π-N シグマ項の定義 $\Sigma_{\pi N} = \hat{m}\langle N| : \bar{u}u + \bar{d}d : |N\rangle$ を思い出し，ゲルマン–オークス–レンナー関係式を用いて，

$$\hat{m}^{-1} \simeq \langle\bar{u}u + \bar{d}d\rangle_0/(f_\pi^2 m_\pi^2)$$

の置き換えを行い，さらに次節で議論される媒質中でのゲルマン–オークス–レ

ンナーの関係式を用いると，

$$\frac{f_\pi^* {m_\pi^*}^2}{f_\pi {m_\pi}^2} = \frac{\langle \mathrm{nm}|\bar{u}u + \bar{d}d|\mathrm{nm}\rangle}{\langle \bar{u}u + \bar{d}d\rangle_0} \simeq 1 - \frac{n_B}{f_\pi^2 m_\pi^2}\Sigma_{\pi N} \tag{6.37}$$

を得る[102]．ここで，* は媒質中での値を示す．また，小さい結合エネルギーからの項は無視した．$\Sigma_{\pi N}$ の "実験値" は $50 \pm 10\,\mathrm{MeV}$ である．正の有限値であることに注意．(6.37) の右辺を密度 ρ について展開したとき，カイラル凝縮体は最低次の近似では標準核密度 $\rho_0 = 0.17\,\mathrm{fm}^{-3}$ で既に 35 % 減少していることが分かる．この減少の物理的起源は有限温度のときと同様である．有限温度で熱的に励起していたパイ中間子（や他のハドロン）が果たしていた役割を核子が果たすことになる．つまり，系に $\bar{q}q$ $(q = u, d)$ のプローブを入れたとき，$\bar{q}q$ は真空にヒットするときもあるし，核子にヒットするときもある．後者の確率は核子密度に比例する．$\Sigma_{\pi N}/\hat{m} \sim 10$ であり，正の値なので核物質中のカイラル凝縮体の絶対値は減少することになる．

なお，このファインマン–ヘルマンの定理を用いた議論は，直観的には，文献 [103] で議論されている描像，すなわち，核物質中では核子の存在により真空が排除（'clear'）されるため，絶対値のカイラル秩序変数が減少する，という **'Clearing-Out' 模型**と同じ内容を（より精密化して）表していると理解できる．

この結果は，大きい原子核を使って核媒質中でのカイラル対称性の部分的回復の可能性を探ることが現実的な興味深い研究課題であることを強く示唆している．この話題についての最近の発展については，たとえば，解説 [104] を参照のこと．

[問い] 5.5 節での結果 $\langle N| : \bar{s}s : |N\rangle = 0.53$ を用いて，$\langle \mathrm{nm}| : \bar{s}s : |\mathrm{nm}\rangle$ の標準核密度での値を求めよ．また，ケイ中間子に対する核媒質中でのゲルマン–オークス–レンナー関係式を仮定して，核媒質中で $f_K^* {m_K^*}^2$ はどの程度変化するか考察せよ．また，$\langle N| : \bar{s}s : |N\rangle \sim 0$ とした結果と比較せよ．

6.6 ハドロニックモード

ここでは，有限温度・密度を持つ媒質中でのハドロンモード励起について議論する．ここでハドロンモードというのは，その系に当該のハドロンの量子数を与えたときのスペクトル関数のピークに現われる励起モードのことをいう．そのハドロンが真空中で幅を持っていなくても，媒質中では一般にその媒質中の粒子との相互作用で有限の寿命を持つことになる．これは，真空中でそのハドロンのスペクトル関数が極小さい幅しか持っていない場合でも，媒質中では

ピークが幅を持つことを意味する．相互作用が大きい場合は，ハドロン励起の質量とか幅という量でそのような励起を記述することが最早不適切になる場合もある．新たなピークが現れる場合も稀ではないのである．したがって，意味のあるのはそのハドロンのチャンネルでのスペクトル関数の振る舞いである．

有限温度でのカイラル相転移でのソフトモードとして，臨界温度より高い温度でのシグマ中間子あるいはパイ中間子的モードの存在が議論されている[47], [48], [105]．この問題が興味あるのは，QGP 相でのハドロン（的集団）モードの存在ということを主張しているからである．これは，ほとんど自由なクォークとグルーオンからなる弱結合系という素朴な初期の QGP に関する描像[91] を根本的に転換している．興味深いことに RHIC で生成された物質は強相関物質であることを強く示唆している．このようなハドロン的モードの存在が実験から要請される現実的な課題として研究されている．

クォーク間相互作用が次のように 4 体相互作用で与えられているとする：

$$\mathcal{H}_1 = -\sum_a \frac{g_a}{2} :(\bar{q}\Gamma_a q)^2:. \tag{6.38}$$

ここで，正規積 :: は前節で与えられたダイナミカルに与えられる質量 M を持つクォーク場に対する真空であり，次の無摂動ハミルトニアンで記述される：

$$H_0 = \int d^3\boldsymbol{x}\, \bar{q}\gamma^0(-i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla + M)q + \mu^2\sigma_M/2, \quad K_0 = H_0 - \mu :N:.$$

以下では時間依存の自己無撞着平均場理論を適用する．物理的には，特定の $\bar{q}\Gamma_a q$ に結合する外場 $\varphi_a^{\rm ext}$ を導入し系の応答を見ることを想定している．

外場により系は擾乱を受け，その擾乱は次の平均場で近似できるとしよう：

$$\langle\langle :\bar{q}\Gamma_a q: \rangle\rangle \equiv -\mu^2\varphi_a/G_a. \quad (g_a = (G_a/\mu)^2). \tag{6.39}$$

ここでは平均場 φ_a は今のところ未定であり，この平均場内を運動するクォーク場 $q(x)$ を求めた後 (6.39) によって自己無撞着に決定される．

この近似では，相互作用ハミルトニアンは次のように置き換えられる：

$$\mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_{\rm MFA} = G_a :\bar{q}\Gamma_a q: \varphi_a + \mu^2/2\cdot\varphi_a^2. \tag{6.40}$$

この平均場近似のもとで虚時間形式でのディラック方程式は以下のように書ける：

$$(-\gamma^0\frac{\partial}{\partial\tau} + i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla - M + \mu\gamma^0 - G_a\varphi_a\Gamma_a)q = 0. \tag{6.41}$$

さて，この方程式の解を用いて，(6.5) によりグリーン関数 $\mathcal{G}$ を定義する．$G_a = 0$ と置いたときのグリーン関数が $\mathcal{G}^{(0)}$ である：

$$(-\gamma^0\frac{\partial}{\partial\tau} + i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla - M + \mu\gamma^0)\mathcal{G}^{(0)}(\tau-\tau', \boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') = \delta(\tau')\delta(\boldsymbol{x}'). \tag{6.42}$$

(6.41) および (6.42) より，$\mathcal{G}$ は次の積分方程式を満たすことが分かる：

$$\mathcal{G}(\tau,\tau',\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \mathcal{G}^{(0)}(\tau-\tau',\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) + \int_0^\beta d\tau'' \int d^3\boldsymbol{x}\,\mathcal{G}(\tau,\tau'',\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})G_a\varphi_a(\tau'',\boldsymbol{z}) \times\Gamma_a\mathcal{G}^{(0)}(\tau''-\tau',\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}). \tag{6.43}$$

平均場 φ_a を決定する自己無撞着方程式 (6.39) はこのグリーン関数を用いて次のように表される：

$$-\frac{\mu^2}{G_a}\varphi_a = \langle\langle : \bar{q}\Gamma_a q :\rangle\rangle$$

$$\simeq \mathrm{Tr}\left[\Gamma_a\mathcal{G}^{(0)}G_a\varphi_a\Gamma_a\mathcal{G}^{(0)}\right] \tag{6.44}$$

$$= G_a\mathrm{Tr}\Pi_a\varphi_a. \tag{6.45}$$

ただし，2 番目の等式において平均場 φ_a が小さいとして線型近似を用いた．ここで，Tr は内部自由度だけではなく時空間座標についても和を取ることを意味する．

さて，(6.45) は動的平均場 φ_a について線型であるから，フーリエ変換をすると便利である（ただし，時間については虚時間になっていることに注意）：

$$[-\mu^2 - G_a^2\pi_a(\omega_n,\boldsymbol{q})]\tilde{\varphi}_a(\omega_n,\boldsymbol{q}) \equiv D_a^{-1}(\omega_n,\boldsymbol{q})\tilde{\varphi}_a(\omega_n,\boldsymbol{q}) = 0. \tag{6.46}$$

ただし，

$$\pi_a(\omega_n,\boldsymbol{q}) = \mathrm{Tr}\left[\Gamma_a\mathcal{G}^{(0)}\Gamma_a\mathcal{G}^{(0)}\right], \tag{6.47}$$

はこのチャンネルの分極を与える．

我々は $\tilde{\varphi}_a \neq 0$ の状態に興味があるから，励起モードの虚時間形式での分散式として次の方程式を得る：

$$\frac{-1}{\mu^2}D_a(\omega_n,\boldsymbol{q})) = 1 + g_a\pi_a(\omega_n,\boldsymbol{q}) = 0. \tag{6.48}$$

実際は，$i\omega_n$ を実変数 ω に次のように解析接続して遅延グリーン関数 $D_R(\omega, q)$ および $\Pi_R(\omega,\boldsymbol{q})$ を求めることになる：

$$i\omega_n \to \omega + i\eta. \quad (\eta > 0).$$

6.6.1 $\Pi_R(\omega, q)$ の計算

まず，虚時間形式の $\pi_a(\omega_n,\boldsymbol{q})$ を求める（$\omega_n = 2\pi nT$ がボソン的であることに注意．以下では，$\omega_n > 0$ とする）：

$$\pi_a(\omega_n,\boldsymbol{q}) = \mathrm{Tr}T\sum_m\int\frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\Gamma_a\mathcal{G}^{(0)}(\nu_m+\omega_n,\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})\Gamma_a\mathcal{G}^{(0)}(\nu_m,\boldsymbol{p})$$
$$= T\int\frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\mathrm{Tr}\Big[\sum_{\nu_m>0} + \sum_{0<\nu_m+\omega_n,\,\nu_m<0} + \sum_{\nu_m+\omega_n<0}\Big] \times\Gamma_a\mathcal{G}^{(0)}(\nu_m+\omega_n,\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})\Gamma_a\mathcal{G}^{(0)}(\nu_m,\boldsymbol{p}). \tag{6.49}$$

ここに，$\mathcal{G}^{(0)}(\nu_m, \boldsymbol{p})$ は (6.14) に与えられている自由場の虚時間グリーン関数である．

以下の計算の便宜のためには，対応する実時間の遅延および先進グリーン関数を定義しておく必要がある：

$$G_R^{(0)}(p^0, \boldsymbol{p}) = (\tilde{p}\cdot\gamma + M)\frac{1}{\tilde{p}^2 - M^2 + i\mathrm{sign}(\tilde{p}^0)\eta}, \tag{6.50}$$

$$G_A^{(0)}(p^0, \boldsymbol{p}) = (\tilde{p}\cdot\gamma + M)\frac{1}{\tilde{p}^2 - M^2 - i\mathrm{sign}(\tilde{p}^0)\eta} = \left(G_R^{(0)}(p)\right)^*. \tag{6.51}$$

ただし，$\tilde{p}^\mu = (p^0 + \mu, \boldsymbol{p})$. 特に，

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}G_R^{(0)}(p^0, \boldsymbol{p}) &= -\pi\mathrm{sign}(p^0 + \mu)(\tilde{p}\cdot\gamma + M)\delta(p^2 - M^2)\\ &= -\mathrm{Im}G_A^{(0)}(p^0, \boldsymbol{p}).\end{aligned} \tag{6.52}$$

一般に，これらのグリーン関数は同一のスペクトル関数 $\rho(\omega, \boldsymbol{p})$ を用いて次のようにスペクトル表示することができる：

$$\mathcal{G}(\nu_n, \boldsymbol{p}) = \int \frac{d\omega'}{2\pi}\frac{\rho(\omega', \boldsymbol{p})}{i\nu_n - \omega'}, \tag{6.53}$$

$$G_R(\nu, \boldsymbol{p}) = \int \frac{d\omega'}{2\pi}\frac{\rho(\omega', \boldsymbol{p})}{\nu - \omega' + i\eta}, \tag{6.54}$$

$$G_A(\nu, \boldsymbol{p}) = \int \frac{d\omega'}{2\pi}\frac{\rho(\omega', \boldsymbol{p})}{\nu - \omega' - i\eta}. \tag{6.55}$$

これより，虚時間グリーン関数と実時間グリーン関数の間には一般に次の関係が成り立つ：

$$\mathcal{G}(\nu_n, \boldsymbol{p}) = G_R(i\nu_n, \boldsymbol{p}), \quad \nu_n > 0 \tag{6.56}$$

$$= G_A(i\nu_n, \boldsymbol{p}), \quad \nu_n < 0. \tag{6.57}$$

次の関係式も有用である：

$$\rho(\nu, \boldsymbol{p}) = \frac{1}{i}\left[\mathcal{G}(\nu_n, \boldsymbol{p})|_{i\nu_n=\nu-i\eta} - \mathcal{G}(\nu_n, \boldsymbol{p})|_{i\nu_n=\nu+i\eta}\right], \tag{6.58}$$

$$= -2\,\mathrm{Im}G_R(\nu, \boldsymbol{p}), \tag{6.59}$$

$$= 2\,\mathrm{Im}G_A(\nu, \boldsymbol{p}). \tag{6.60}$$

これらの関係式は虚時間形式の有限温度の場の理論で重要な役割を果たす．この関係式の重要さを強調した人たちの名前を取って，アブリコソフ–ゴリコフ–ジャロシンスキィ–フラトキン（Abrikosov-Gor'kov-Dzyaloshinski-Fradkin：AGDF）定理と呼ばれる．この関係式の基礎は松原グリーン関数のフーリエ変換（フーリエ級数展開）であるが，これを最初に実行し今日松原振動数と呼ばれる振動数 $\nu_n = (2n+1)\pi T$ および $\omega_n = 2n\pi T$ を導出したのは江沢，友沢，

梅沢[*4]の日本人である．虚時間形式では，虚時間グリーン関数をダイアグラム法などで計算し，振動数 $i\nu_n$ を上半平面あるいは下半平面に解説接続をしてそれぞれ遅延および先進グリーン関数を得る．ただし，この解析接続の操作は 2 ループ以上の計算では困難なことが多い．

さて，(6.49) における虚時間グリーン関数を (6.57) の関係式を用いて実時間グリーン関数に書き換えると，

$$\begin{aligned}\pi_a(\omega_n,\,\boldsymbol{q}) = T\int\frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\mathrm{Tr}\Big[&\sum_{\nu_m>0}\Gamma_a G_R^{(0)}(i(\nu_m+\omega_n),\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})\Gamma_a G_R^{(0)}(i\nu_m,\boldsymbol{p})\\&+\sum_{0<\nu_m+\omega_n,\nu_m<0}\Gamma_a G_R^{(0)}(i(\nu_m+\omega_n),\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})\Gamma_a G_A^{(0)}(i\nu_m,\boldsymbol{p})\\&+\sum_{\nu_m+\omega_n<0}\Gamma_a G_A^{(0)}(i(\nu_m+\omega_n),\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})\Gamma_a G_A^{(0)}(i\nu_m,\boldsymbol{p})\Big].\end{aligned} \tag{6.61}$$

さて，次の ν_m についての任意の和は複素 ϵ 平面の周回積分で表すことができる：

$$\sum_{\nu_-<\nu_m<\nu_+}F(\nu_m) = \int_C\frac{d\epsilon}{2\pi i}\,\frac{\tanh\frac{\epsilon}{2T}}{2T}F(\epsilon). \tag{6.62}$$

ここで，C は複素 ϵ 平面上の径路であり，虚軸に沿って虚軸上の $i\nu_m$ （$\nu_- < \nu_m < \nu_+$）をすべて反時計回りに囲むものである．上記の ν_m についての 3 種の和に対応している径路をそれぞれ $C_{i=1,2,3}$ と書くと，(6.61) は以下のように書き直すことができる：

$$\begin{aligned}&\pi_a(\omega_n,\,\boldsymbol{q})\\&= T\int\frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\mathrm{Tr}\Big[\int_{C_1}\frac{d\epsilon}{2\pi i}\frac{1}{2T}\tanh\frac{\epsilon}{2T}\Gamma_a G_R^{(0)}(\epsilon+i\omega_n,\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})\Gamma_a G_R^{(0)}(\epsilon,\boldsymbol{p})\\&\quad+\int_{C_2}\frac{d\epsilon}{2\pi i}\frac{1}{2T}\tanh\frac{\epsilon}{2T}\Gamma_a G_R^{(0)}(\epsilon+i\omega_n,\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})\Gamma_a G_A^{(0)}(\epsilon,\boldsymbol{p})\\&\quad+\int_{C_3}\frac{d\epsilon}{2\pi i}\frac{1}{2T}\tanh\frac{\epsilon}{2T}\Gamma_a G_A^{(0)}(\epsilon+i\omega_n,\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})\Gamma_a G_A^{(0)}(\epsilon,\boldsymbol{p})\Big]\\&=\frac{1}{2}\int\frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\mathrm{Tr}\Big[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\epsilon}{2\pi i}\tanh\frac{\epsilon}{2T}\Gamma_a G_R^{(0)}(\epsilon+i\omega_n,\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})\Gamma_a G_R^{(0)}(\epsilon,\boldsymbol{p})\\&\quad-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\epsilon}{2\pi i}\tanh\frac{\epsilon}{2T}\Gamma_a G_R^{(0)}(\epsilon+i\omega_n,\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})\Gamma_a G_A^{(0)}(\epsilon,\boldsymbol{p})\\&\quad+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\epsilon}{2\pi i}\tanh\frac{\epsilon-i\omega_n}{2T}\Gamma_a G_R^{(0)}(\epsilon+i\omega_n,\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})\Gamma_a G_A^{(0)}(\epsilon-i\omega_n,\boldsymbol{p})\\&\quad+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\epsilon}{2\pi i}\tanh\frac{\epsilon-i\omega_n}{2T}\Gamma_a G_A^{(0)}(\epsilon+i\omega_n,\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})\Gamma_a G_A^{(0)}(\epsilon,\boldsymbol{p})\Big].\end{aligned} \tag{6.63}$$

---

*4) H. Ezawa, Y. Tomozawa and H. Umezawa, Nuovo Cimento, **5** (1957), 810.

ここで，$\omega_n/T = 2n\pi$ より，

$$\tanh\frac{\epsilon - i\omega_n}{2T} = \tanh\frac{\epsilon}{2T},$$

および，

$$\begin{aligned} G_R^{(0)}(\epsilon, \boldsymbol{p}) - G_A^{(0)}(\epsilon, \boldsymbol{p}) &= G_R^{(0)}(\epsilon, \boldsymbol{p}) - (G_R^{(0)}(\epsilon, \boldsymbol{p}))^* \\ &= 2i\,\mathrm{Im}G_R^{(0)}(\epsilon, \boldsymbol{p}), \end{aligned} \tag{6.64}$$

より，

$$\begin{aligned} \pi_a(\omega_n, \boldsymbol{q}) = \mathrm{Tr}\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\tanh\frac{\epsilon}{2T}\Big[&\Gamma_a G_R^{(0)}(\epsilon + i\omega_n, \boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})\Gamma_a \mathrm{Im}G_R^{(0)}(\epsilon, \boldsymbol{p}) \\ &+\Gamma_a \mathrm{Im}G_R^{(0)}(\epsilon, \boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})\Gamma_a G_A^{(0)}(\epsilon - i\omega_n, \boldsymbol{p})\Big]. \end{aligned} \tag{6.65}$$

ここで，

$$i\omega_n \to \omega > 0$$

と置き換えて，次の遅延分極関数を得る：

$$\begin{aligned} \Pi_a(\omega, \boldsymbol{p}) = \mathrm{Tr}\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\tanh\frac{\epsilon}{2T}\Big[&\Gamma_a G_R^{(0)}(\epsilon + \omega, \boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})\Gamma_a \mathrm{Im}G_R^{(0)}(\epsilon, \boldsymbol{p}) \\ &+\Gamma_a \mathrm{Im}G_R^{(0)}(\epsilon, \boldsymbol{p})\Gamma_a G_A^{(0)}(\epsilon - \omega_n, \boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\Big]. \end{aligned} \tag{6.66}$$

ただし，第 2 項において $\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}'$ $(\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}' - \boldsymbol{q})$ と置き，$\boldsymbol{p}'$ を改めて $\boldsymbol{p}$ と書いた．この表式の有用さは (6.52) より虚数部がデルタ関数に比例することから了解できるであろう．

6.7 有限温度・密度での低エネルギー定理

温度 0 でのときと同様の計算を虚時間形式で行うと，有限温度での中間子 α とクォークとの結合定数は (6.48) を解析接続した表式より

$$G^2_{\alpha q}(m_\alpha) = [\frac{d}{d\omega^2}D^R_\alpha(\omega, \boldsymbol{q})^{-1}]^{-1}|_{\omega=m_\alpha}, \tag{6.67}$$

$$= -1/[\frac{d}{d\omega^2}\Pi_\alpha(\omega, \boldsymbol{q})]|_{\omega=m_\alpha}, \tag{6.68}$$

と計算できる．ただし，以下では簡単のため $\mu_{u,s} = 0$ とした*5)．たとえば，パイ中間子-クォーク結合定数は

$$G^2_{\pi q}(m_\pi) = \left[\frac{N_c}{2\pi^2}\int_0^\Lambda p^2dp(1 - n(E_p) - \bar{n}(E_p))\,\frac{E_p}{(E_p^2 - m_\pi^2/4)^2}\right]^{-1} \tag{6.69}$$

*5) $\mu_{u,s} \neq 0$ の場合への拡張は自明である．

と与えられる．ケイ-クォーク結合定数 $G^2_{Kq}(\omega_K)$ も少し複雑だが同様の表式で与えられる．すなわち，カイラル極限 $(m_K^2=0)$ で，

$$G^2_{Kq}(0) = M_+^3 \left[\frac{2N_c}{\pi^2}\int_0^\Lambda p^2 dp \frac{h(M_s)-h(M_u)}{M_-}\right]^{-1}. \tag{6.70}$$

ただし，

$$h(M_i) = \frac{1-2n(E_i)}{E_i}(2E_i^2 - M_i M_+), \quad M_\pm = M_s \pm M_u. \tag{6.71}$$

q_i-$\bar{q}_j$ からなる NG モード α の質量 m_α^2 について展開すると，以下の表式を得る：

$$\frac{m_i+m_j}{M_i+M_j} \simeq \frac{G_\alpha}{G_{\alpha q}(0)}\cdot m_\alpha^2. \tag{6.72}$$

ここで，質量に関するギャップ方程式 $M_i+M_j = m_i+m_j-2G_\alpha\langle\langle\bar{q}_i q_i+\bar{q}_j q_j\rangle\rangle$ を用いた．表式 (6.72) は後に媒質中でのゲルマン–オークス–レンナー関係式を導出するときに用いられる．

q_i-$\bar{q}_j$ からなる中間子 α の崩壊定数 $f_\alpha(T)$ も松原グリーン関数を用いれば真空のときと同様に計算することができる：

$$\begin{aligned} f_\alpha(T)q^0 \;=\; & -G_{\alpha q}(m_\alpha)\mathrm{Tr}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\tanh\frac{p^0}{2T} i\gamma_5 \\ & \times\{G^R_{0i}(p^0+\omega,\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})\gamma_0\gamma_5 \mathrm{Im}G^R_{0j}(p^0,\boldsymbol{p}) \\ & +\mathrm{Im}G^R_{0i}(p^0,\boldsymbol{p})\gamma_0\gamma_5 G^A_{0j}(p^0-\omega,\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\}. \end{aligned} \tag{6.73}$$

特に $\mu_{u,s}=0$ の場合を書き下すと以下のようになる：

$$f_\alpha(T) = G_{\alpha q}(m_\alpha)\frac{3}{\pi^2}\int_0^\Lambda dp\, p^2 \frac{g(p;i,j)+g(p;j,i)}{((E_{i,p}-E_{j,p})^2-m_\alpha^2)((E_{i,p}+E_{j,p})^2-m_\alpha^2)}. \tag{6.74}$$

ここに，

$$g(p;i,j) = \frac{\tanh(E_{i,p}/2T)}{E_{i,p}}\{-M_i(m_\alpha^2+M_i^2-M_j^2)+2(M_i-M_j)E_{i,p}^2\}.$$

たとえば，パイ中間子モードの場合は

$$f_\pi(T)/G_{\pi q}(m_\pi) = M_u\frac{2N_c}{\pi^2}\int_0^\Lambda dp\, p^2\frac{f(E_{u,p})}{E_{u,p}}\cdot\frac{1}{4E_{u,p}^2-m_\pi^2} \tag{6.75}$$

となる．カイラル極限の場合（$m_\alpha=0$）には上の表式は

$$G_{\alpha q}(0)f_\alpha|_{m_\alpha=0} = \frac{M_i+M_j}{2} \tag{6.76}$$

に帰着される．$\mu_{u,s}\neq 0$ の場合も同様の表式が得られることは明らかである．(6.76) は有限温度・密度でのゴールドバーガー–トリーマン (G-T) 関係式である．

温度 0 のときと同様にして，(6.72) と G-T 関係式 (6.76) を用いると，媒質

中でのゲルマン–オークス–レンナー関係式を得る：

$$m_\alpha(T)^2 f_\alpha^2(T)|_{m_\alpha=0} = -\frac{m_i + m_j}{2} \cdot \langle\langle \bar{q}_i q_i + \bar{q}_j q_j \rangle\rangle. \tag{6.77}$$

6.8 QCD 相転移のソフトモード：クォーク・グルーオンプラズマ中のハドロン励起

これまでカイラル対称性が破れた相における中間子モードの性質について議論してきた．一方，真空の場合であるが，5.8 節において対称性の回復したウィグナー相でのソフトモードの存在について議論した．それは，相転移の秩序変数の量子的ゆらぎであり，5.8 節においてはシグマ中間子とパイ中間子の量子数を持つモードについて議論した．有限温度・密度でのカイラル相転移においても，相転移の次数が 2 次あるいは 2 次に近いクロスオーバーや 1 次であっても，秩序変数のゆらぎとしてのソフトモードは存在するであろう．そのことは文献 [48] で最初に議論され，カイラル極限の NJL 模型を用いて例示された．さらに，そのようなソフトモードによるクォークスペクトルへの影響が調べられ，スペクトル関数が 3 個のピークを待つ可能性など興味深い結果が得られている [106]．また，いわゆる PNJL 模型 [107],[108] によるカイラルソフトモードの解析は [105] でなされた．

図 6.2 には，カイラル相転移のウィグナー相における臨界温度 T_c 付近のスカラーおよび擬スカラーチャンネルのスペクトル関数 $\rho_\sigma(p,\omega)$ の温度依存性を示

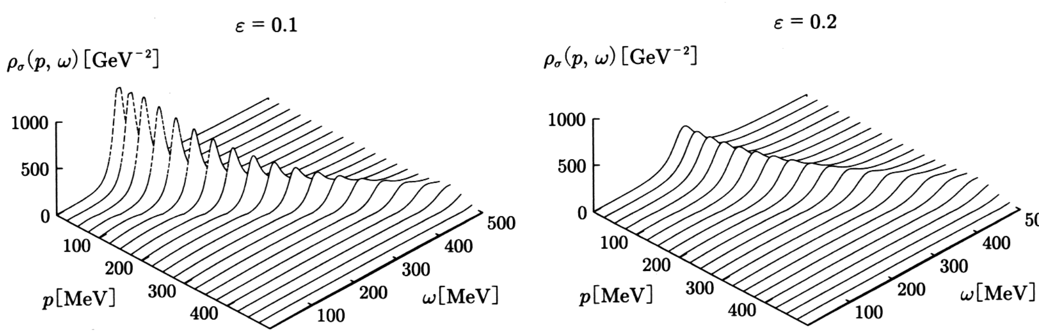


図 6.2 有効温度 $\epsilon \equiv (T - T_c)/T_c = 0.1, 0.2$ におけるスカラー（擬スカラー）チャンネルのスペクトル関数 $\rho_{\sigma,\pi}(p,\omega)$．$(p,\omega)$ 平面の原点付近での鋭いピークは，QGP 相においてハドロン的な集団励起がカイラル相転移のソフトモードとして存在することを示している．以下の論文より一部改変して転載：M. Kitazawa, T. Kunihiro and Y. Nemoto, Phys. Lett. B **633** (2006) 269.

している*6)：ただし，カイラル極限の場合であり，$\epsilon \equiv (T-T_c)/T_c$ は有効温度である．臨界点近傍でスペクトル関数に鋭いピークが現われている．これは，このチャンネルでよく定義される素励起が存在することを意味する．これらの素励起はカラー 1 重項であることに注意しよう．すなわち，臨界温度より高い温度での QGP 相にハドロン的な集団励起が存在することを示唆している．さらにチャームやボトムなど重いクォークからなるクォーコニウムの QGP 中での振る舞いが閉じ込め-非閉じ込め相転移のシグナル*7)とも関連して再び大きな関心の的になっている．現在このようなハドロン的モードの存在が実験から要請される現実的な課題として研究されている [109]．ここでは，紙数の都合でこれ以上の議論をしない．詳しくは上で引用した文献を参考のこと．

*6) 5.8 節では $S_\sigma(q^2)$ と書いた量と同じものである．真空の場合とは違い，媒質中では一般に p と ω に別々に依存していることに注意．

*7) T. Matsui and H. Satz, Phys. Lett. B **178**, 416 (1986).

第 7 章
クォーク数感受率と密度ゆらぎ

この章では，有限温度・密度クォーク物質のクォーク数感受率 χ_q の振る舞いを通して，有限化学ポテンシャルにおけるカイラル相転移の特徴を探る．相対論的に核多体系を記述する場の理論的模型であるシグマ-オメガ模型（Walecka 模型 [110]）においても知られているように，フェルミオンが質量を持つ有限密度系においては，スカラー場とベクトル場のゼロ成分が混合を起こす [111]．このために，χ_q は有限温度・密度系におけるカイラル相転移の重要な特性を表すこととなる．なお，クォークは1/3の重粒子数を担うので，フレーバー1重項のクォーク数感受率は重粒子数感受率と本質的に同じものである．ここでも，混同して使うことにする．

7.1 有限密度・有限温度でのカイラル相転移と密度ゆらぎ

前章で見たように，(T, μ) 平面に描いた QCD 相図には低温領域から伸びた1次相転移線があり，それがある相平面上の点 (T_c, μ_c)，すなわち，臨界点 CP で終わってクロスオーバー転移につながっていることが示唆されている．少なくとも多くの有効模型を用いた計算はそのことを明確に示している．CP では相転移の次数は2次である．CP 付近においては密度ゆらぎ，すなわち，単位体積あたりの粒子数ゆらぎが大きいことが期待されることを簡単に見ておこう [112]．1次相転移点では，2つの相 I と II が平衡状態にある．すなわち，エネルギー平衡，力学的平衡，そして化学平衡が成り立っている．これらの条件は，それぞれの温度 $T_{\mathrm{I,II}}$，圧力 $P_{\mathrm{I,II}}$，化学ポテンシャル $\mu_{\mathrm{I,II}}$ を用いて以下のように表される：

$$T_{\mathrm{I}} = T_{\mathrm{II}}, \quad P_{\mathrm{I}} = P_{\mathrm{II}}, \quad \mu_{\mathrm{I}} = \mu_{\mathrm{II}}. \tag{7.1}$$

なお，この3つの条件は熱力学的ポテンシャル $\Omega(T, \mu) = -PV$ を用いて次の一つの式で表される：$\Omega_{\mathrm{I}}(T, \mu) = \Omega_{\mathrm{II}}(T, \mu)$．さて，I，II をそれぞれカイラル

対称性が破れた相と（部分的に）回復した相であるとすると，それぞれの相でのクォーク質量 $M_{\mathrm{I,II}}$ は以下の不等式を満たす：$M_{\mathrm{I}} > M_{\mathrm{II}}$. 簡単のために，温度 0 のときを考え，それぞれの相のフェルミ運動量を p_{F_i} と書くと，

$$\mu_{\mathrm{I}} = \sqrt{M_I^2 + p_{F_I}^2} = \mu_{\mathrm{II}} = \sqrt{M_{\mathrm{II}}^2 + p_{F_{II}}^2}.$$

したがって，$p_{F_I} < p_{F_{II}}$. すなわち，カイラル対称性が（部分的に）回復した相は破れた相よりも密度が高い．つまり，1 次のカイラル相転移には必然的に密度の「跳び」が伴う．臨界点 CP ではこの「跳び」がちょうど消えるのである．しかし，密度の「跳び」ある領域を含む臨界点近傍では密度ゆらぎは大きくなる．このようにして，QCD の臨界点付近での密度ゆらぎの重要さが理解される．

7.2 感受率と相関関数

まず，一般的な感受率について説明する．また，いわゆる「揺動散逸定理」との関連を説明するために，相関関数も合わせて導入する．

$\psi_{K\alpha}(t, \boldsymbol{x})$ $(\alpha = 1, 2, \ldots n)$ を $\hat{K} \equiv \hat{H} - \mu\hat{N}$ で時間発展する実のボソン的演算子とする．次の熱平衡期待値を相関関数と呼ぶ：

$$S_{\alpha\beta}(t, \boldsymbol{x}) \equiv \langle\langle \psi_{K\alpha}(t, \boldsymbol{x})\psi_{K\beta}(0, \boldsymbol{0})\rangle\rangle. \tag{7.2}$$

相関関数はゆらぎとも解釈できる．次の対称化した相関関数 $\tilde{S}_{\alpha\beta}$ も導入しておく：

$$\tilde{S}_{\alpha\beta}(t, \boldsymbol{x}) \equiv \frac{1}{2}\langle\langle(\psi_{K\alpha}(t, \boldsymbol{x})\psi_{K\beta}(0, \boldsymbol{0}) + \psi_{K\beta}(0, \boldsymbol{0})\psi_{K\alpha}(t, \boldsymbol{x}))\rangle\rangle. \tag{7.3}$$

相関関数は本質的にスペクトル関数であり，「動的構造因子」とも呼ばれる：

$$S_{\alpha\beta}(\omega, \boldsymbol{p}) = \frac{1}{1 - e^{-\beta\omega}}\rho_{\alpha\beta}(\omega, \boldsymbol{p}). \tag{7.4}$$

同様に，対称化相関関数は次のように与えられる：

$$\tilde{S}_{\alpha\beta}(\omega, \boldsymbol{p}) = \frac{1}{2}\coth\frac{\beta\omega}{2}\cdot\rho_{\alpha\beta}(\omega, \boldsymbol{p}).$$

スペクトル関数は実時間グリーン関数の虚数部で与えられるので，

$$\tilde{S}_{\alpha\beta}(\omega, \boldsymbol{p}) = -\coth\frac{\beta\omega}{2}\cdot\mathrm{Im}G^R_{\alpha\beta}(\omega, \boldsymbol{p}) = \coth\frac{\beta\omega}{2}\cdot\mathrm{Im}G^A_{\alpha\beta}(\omega, \boldsymbol{p}), \tag{7.5}$$

を得る．この関係式は「揺動散逸定理」と呼ばれる．

さて，演算子 $\psi_{K\alpha}$ に結合する静的な外場 F_α が印加され，ハミルトニアンに次の相互作用項が付け加わるとしよう：

$$H_{\mathrm{ex}} = -\sum_\alpha \int d\boldsymbol{x}\psi_{K\alpha}(0, \boldsymbol{x})F_\alpha.$$

ここでは簡単のために，F_α は位置に依存しないとする．このとき，外場のために $\psi_{K\alpha}(0,\boldsymbol{x})$ は期待値を持つであろう：

$$\begin{aligned}\varphi_{K\alpha} \equiv&\ \langle\langle\psi_{K\alpha}(0,\boldsymbol{x})\rangle\rangle_F = \frac{\mathrm{Tr}[\psi_{K\alpha}(0,\boldsymbol{x})e^{-\beta(K+H_{\mathrm{ex}})}]}{\mathrm{Tr}[e^{-\beta(K+H_{\mathrm{ex}})}]}\\ =&\ \frac{1}{V}\int d\boldsymbol{x}\langle\langle\psi_{K\alpha}(0,\boldsymbol{x})\rangle\rangle_F. \end{aligned}\tag{7.6}$$

最後の等号で並進不変性を使った．

（静的）な感受率 $\chi_{\alpha\beta}$ は外場の変化に対する期待値の応答の度合いとして定義される：

$$\chi_{\alpha\beta} = \frac{\partial\varphi_\beta}{\partial F_\alpha}\Big|_{F=0}. \tag{7.7}$$

演算子 $\psi_{K\beta}$ が K と可換のときは，簡単に

$$\chi_{\alpha\beta} = \beta\int d\boldsymbol{x}\langle\langle\psi_{K\beta}(0,\boldsymbol{x})\psi_{K\alpha}(0,\mathbf{0})\rangle\rangle - \beta\langle\langle\psi_{K\beta}(0,\mathbf{0})\rangle\rangle\langle\langle\psi_{K\alpha}(0,\mathbf{0})\rangle\rangle \tag{7.8}$$

と書ける．したがって，相関関数を用いて

$$\chi_{\alpha\beta} = \beta\int d\boldsymbol{x}S_{\alpha\beta}(0,\boldsymbol{x}) = \beta\lim_{\boldsymbol{p}\to\mathbf{0}}\int\frac{d\omega}{2\pi}S_{\alpha\beta}(\omega,\boldsymbol{p})$$

を得る．さらに，$\psi_{K\beta}$ が保存量であるから，あるカレント $\boldsymbol{j}_\beta(x)$ が存在して

$$\partial_t\psi_{K\beta} + \nabla\cdot\boldsymbol{j}_\beta(x) = 0,$$

と書ける．そのため，

$$\lim_{\boldsymbol{p}\to\mathbf{0}} S_{\alpha\beta}(\omega,\boldsymbol{p}) \propto \delta(\omega), \tag{7.9}$$

が言える．これを使うと，次の基本的な関係式を得る：

$$\chi_{\alpha\beta} = -\lim_{\boldsymbol{p}\to\mathbf{0}} G^R_{\alpha\beta}(0,\boldsymbol{p}). \tag{7.10}$$

$\bar{q}q$ のように，$\psi_{K\beta}$ が保存量でない，すなわち，K と $\psi_{K\beta}$ が可換ではないときは次のようにして感受率を遅延グリーン関数と結びつけることができる [113]．まず，演算子 X の微分に関する次のファインマンの公式に注意する：

$$\mathrm{e}^X\, d_F\, \mathrm{e}^{-X} = \int_0^1 ds\, \mathrm{e}^{sX}(-d_F X)\mathrm{e}^{-sX}. \tag{7.11}$$

これは，次の関係式から容易に導かれる：

$$\mathrm{e}^{sX}(d_F X)\mathrm{e}^{-sX} = s\,(-d_F X) + \frac{s^2}{2}\,[-d_F X,\, X] + \frac{s^3}{3!}\,[[-d_F X,\, X],\, X] + \cdots.$$

$X = K + H_{\mathrm{ex}}$ とおいて (7.11) を用いると，

$$
\begin{aligned}
\chi_{\alpha\beta} &= \int_0^1 ds e^{\beta\Omega}\mathrm{Tr}\Big[e^{-\beta K}\psi_{K\beta}(0,\,\mathbf{0})e^{s\beta K}\frac{\partial}{\partial F_\alpha}[-\beta(K+H_{\mathrm{ex}})]e^{-s\beta K}\Big] \\
&= \int_0^\beta d\tau \int d^3\boldsymbol{x}\langle\langle\psi_{K\beta}(0,\,\mathbf{0})e^{\tau K}\psi_{K\alpha}(0,\boldsymbol{x})e^{-\tau K}\rangle\rangle \\
&= \int_0^\beta d\tau \int d^3\boldsymbol{x}\langle\langle\psi_{K\beta}(0,\,\mathbf{0})\psi_{K\alpha}(\tau,\boldsymbol{x})\rangle\rangle \\
&= \int_0^\beta d\tau \int d^3\boldsymbol{x}\langle\langle T_\tau\psi_{K\alpha}(\tau,\boldsymbol{x})\psi_{K\beta}(0,\,\mathbf{0})\rangle\rangle \\
&= -\int_0^\beta d\tau \int d^3\boldsymbol{x}\mathcal{G}_{\alpha\beta}(\tau,\,\boldsymbol{x}) \\
&= -\tilde{\mathcal{G}}_{\alpha\beta}(\omega_n=0,\,\boldsymbol{k}=\mathbf{0}).
\end{aligned}
\tag{7.12}
$$

7.3 クォーク数感受率

フレーバー i のクォーク数感受率 χ_{ij} （$i=\mathrm{u,d,s}$）は i-クォークの化学ポテンシャル μ_i の無限小の変化 $\delta\mu_i$ に対する j-クォークの数 $\langle\langle N_i\rangle\rangle$ の応答である．ただし，

$$
N_i = \int d^3\boldsymbol{x} j_0(t,\boldsymbol{x}).
$$

ここに，$j_\mu(t,\boldsymbol{x}) =: \bar{q}(t,\boldsymbol{x})\gamma_\mu q(t,\boldsymbol{x}) :$. ここで，正規積を取っていることに注意.

形式的には，前節の一般論で議論したようにそのような変化は，系に次の摂動ハミルトニアンを付加することで表現できる：

$$
H_{\mathrm{ex}} = -\sum_i \int d^3\boldsymbol{x} q^\dagger(0,\boldsymbol{x})q(0,\boldsymbol{x})\delta\mu_i. \tag{7.13}
$$

こうして，

$$
\chi_{ij} = \frac{\partial}{\partial\mu_i}\rho_j = \beta V\langle\langle :\bar{q}_i\gamma^0 q_i :: \bar{q}_j\gamma^0 q_j :\rangle\rangle \tag{7.14}
$$

ただし，

$$
\rho_i = \mathrm{Tr}N_i\exp[-\beta(H-\sum_i\mu_i N_i)]/V \equiv \langle\langle N_i\rangle\rangle/V \tag{7.15}
$$

は i-クォーク数密度である．

フレーバー 1 重項のクォーク数感受率（重粒子数感受率）は

$$
\chi_B = \left(\sum_i\frac{\partial}{\partial\mu_i}\right)(\sum_j\rho_j) = \sum_{ij}\chi_{ij} \tag{7.16}
$$

となる．同様に，アイソスピン感受率を次のように定義することができる：

$$
\chi_I = \left(\frac{\partial}{\partial\mu_u}-\frac{\partial}{\partial\mu_d}\right)(\rho_u-\rho_d) = \chi_{uu}-2\chi_{ud}+\chi_{dd}. \tag{7.17}
$$

特に，ベクトルチャンネルのフレーバー混合が無視できるときには，

$$\chi_{ij} = \delta_{ij}\,\chi_i$$

と書ける．このときには，

$$\chi_B = \sum_i \chi_i, \quad \chi_I = \chi_u + \chi_d,$$

となる．

クォーク数感受率の物理的意義を知るひとつの手掛かりとして，以下の事実は重要である．すなわち，有限密度では等温圧縮率 $\kappa_T^{(i)} \equiv -N_i^{-1}(\partial V/\partial \mu_i)_{T,N_B}$ と以下のように比例関係にある：

$$\kappa_T^{(i)} = \frac{\chi_i}{\rho_i^2}. \tag{7.18}$$

すなわち，クォーク数感受率が大きいということは，系が圧縮されやすい，小さい圧力で容易に密度が変化する，ということである．このことは，密度ゆらぎが起こりやすいということでもある．

関係式 (7.18) は以下のようにして示される[87]．ただし，以下ではわずらわしいフレーバーの添え字は除く．まず，$F(x, y, z) = 0$ が成り立ち，3 変数 (x, y, z) のうち 2 つが独立であるとき，次のよく知られた関係式が成立する：

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \frac{1}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z}, \quad \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1. \tag{7.19}$$

ここで，$x = N, y = \mu,\ z = V$ とおいて，

$$\left(\frac{\partial N}{\partial \mu}\right)_{T,V} = -\left(\frac{\partial V}{\partial \mu}\right)_{T,N} \left(\frac{\partial N}{\partial V}\right)_{T,\mu} = -\frac{\left(\frac{\partial N}{\partial V}\right)_{T,\mu}}{\left(\frac{\partial \mu}{\partial V}\right)_{T,N}}.$$

を得る．さらに，ヘルムホルツの自由エネルギー F の変分 $dF = -SdT - PdV + \mu dN$ から導かれる次のマクスウェルの関係式が成り立つ：

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial V}\right)_{T,N} = -\left(\frac{\partial P}{\partial N}\right)_{T,N}.$$

ゆえに，

$$\left(\frac{\partial N}{\partial \mu}\right)_{T,V} = \frac{\left(\frac{\partial N}{\partial V}\right)_{T,\mu}}{\left(\frac{\partial P}{\partial N}\right)_{T,V}} = \frac{\left(\frac{\partial N}{\partial V}\right)_{T,P}}{\left(\frac{\partial P}{\partial N}\right)_{T,V}} = \rho \left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)_{T,V}.$$

ここで，$\mu = \mu(T, P)$ であること，および $(\partial N/\partial V)|_{T,P} = \rho$ を用いた．さらに，(7.19) を用いると $(x = N,\ y = P,\ z = V)$，

$$\left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)_{T,V} = -\left(\frac{\partial N}{\partial V}\right)_{T,P} \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{T,N} = \rho V \kappa_T,$$

となる．よって，$\chi = TV\rho^2\kappa_T$. □

7.4 自由クォーク気体の場合

まず簡単のために自由クォーク気体の場合についてクォーク数感受率を計算してみよう．そしてクォーク質量 $M(T,\mu_B)$ が温度や密度によって変化するときの χ_B の振る舞いを見てみよう．

まず，重粒子密度は

$$\rho_B = 2N_F N_c \int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}(n(T,\mu_B) - \bar{n}(T,\mu_B)), \tag{7.20}$$

と与えられる．ここで，

$$n(T,\mu_B) = 1/[\exp\beta(E_p - \mu_B) + 1], \quad \bar{n}(T,\mu_B) = 1/[\exp\beta(E_p + \mu_B) + 1]$$

はクォークと反クォークの分布関数である．ただし，$E_p = \sqrt{M^2 + p^2}$．また，N_F と N_c はそれぞれフレーバーとカラーの数を表す．これを化学ポテンシャルで微分して，

$$\chi_B(T,\mu_B) = 2N_F N_c \beta \cdot \int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\Big\{n(1-n) + \bar{n}(1-\bar{n})\Big\} \tag{7.21}$$

$$\equiv \chi_B^{(0)}(T,\mu_B). \tag{7.22}$$

特に，$\mu_B = 0$ の場合は

$$\chi_B^{(0)}(T,0) \equiv \chi_B^{(0)}(T) = 4N_F N_c \beta \int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\frac{\exp(E_p/T)}{[\exp(E_p/T)+1]^2} \tag{7.23}$$

となる．すぐに分かるように，クォーク質量 $M(T)$ が減少すると，重粒子数感受率 $\chi_B^{(0)}(T)$ は増大する．

7.5 カイラル相転移がある場合：NJL 模型による考察

粒子数密度演算子はベクトルカレント $j^\mu =: \bar{q}\gamma^\mu q :$ の 0 成分であることに注意すると，重粒子数感受率 χ_B は系のベクトル-ベクトル相関の一部であることが分かる．すると，χ_B にはカイラル相転移をドライブするスカラー-擬スカラーチャンネルだけでなく，むしろベクトルチャンネルのクォーク間相互作用が重要な役割を果たすと予想される．これは一般的には斥力的である．一方，密度ゆらぎはフォノンであり，微視的なクォーク間相互作用だけではなく，長距離および低エネルギースケールではクォーク間のフォノン交換相互作用がより重要な役割を果たすとも考えられる．この場合，フォノン-クォークバーテックスはスカラー型になり，引力的である [41]．このことを取り入れた QCD 相図の解析が最近行われた [114]．

ここでは，斥力のベクトル型の相互作用を 4 体フェルミ相互作用として加えた以下の NJL 模型を用いて相互作用が重粒子感受率に与える効果を考察して

みる[111]:

$$\mathcal{L} = \bar{q}(i\gamma\cdot\partial - \boldsymbol{m})q + \sum_{a=0}^{3}\frac{g_S}{2}[(\bar{q}\tau_a q)^2 + (\bar{q}i\tau_a\gamma_5 q)^2]$$
$$-\frac{g_V}{2}\sum_{a=0}^{8}[(\bar{q}\lambda_a\gamma_\mu q)^2 + (\bar{q}\lambda_a\gamma_\mu\gamma_5 q)^2]. \tag{7.24}$$

カイラル凝縮体およびクォーク質量 M_i は自己無撞着平均場近似では以下の方程式によって決定される：

$$\langle\langle\bar{q}_i q_i\rangle\rangle = -2N_c\int\frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\{1 - n_i(T,\tilde{\mu}_i) - \bar{n}_i(T,\tilde{\mu}_i)\}. \tag{7.25}$$

ただし，$\tilde{\mu}$ はベクトル相互作用 g_V の分「ずれた化学ポテンシャル」である：

$$\tilde{\mu}_i = \mu_B - 2g_V\rho_i. \tag{7.26}$$

一方，クォーク密度は $\tilde{\mu}_i$ を用いて以下のように書ける：

$$\rho_i = 2N_c\int\frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\{n_i(T,\tilde{\mu}_i) - \bar{n}(T,\tilde{\mu}_i)\}. \tag{7.27}$$

これを μ_i について微分して $\chi_B(T,\mu_B)$ を得る．ここで重要なことは，$\tilde{\mu}_i$ を通して $M_i(T,\mu_B)$ と $\rho_B(T,\mu_B)$ が結合していることである．

実際，これらの方程式を μ_B で微分することにより，次の連立方程式を得る：

$$\begin{pmatrix} 1+2g_V\chi_B^{(0)} & -\chi_{VS}^{(0)} \\ 4g_s g_V\chi_{VS}^{(0)} & 1-2g_s\chi_s^{(0)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi_B \\ -2g_s\chi_{VS} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \chi_B^{(0)} \\ 2g_s\chi_{VS}^{(0)} \end{pmatrix}. \tag{7.28}$$

ここで，

$$\chi_{VS}^{(0)} \equiv \frac{\partial\langle\langle\bar{q}q\rangle\rangle}{\partial\mu_B}\Big|_{M_i}$$
$$= -2N_F N_c\beta\cdot\int\frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\Big\{n(1-n) - \bar{n}(1-\bar{n})\Big\}, \tag{7.29}$$
$$\chi_s^{(0)} \equiv -\frac{d\langle\langle\bar{q}q\rangle\rangle}{dM}$$
$$= 2N_F N_c\cdot\int\frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\left[\frac{p^2}{E^3}(1-n-\bar{n}) + \beta\frac{M^2}{E^2}\{n(1-n)+\bar{n}(1-\bar{n})\}\right]. \tag{7.30}$$

また，$\chi_B^{(0)}(T,\mu_B)$ は自由クォーク気体のクォーク数感受率である．ここで，以下の関係式を用いた：

$$\chi_s \equiv -\frac{d\langle\langle\bar{q}q\rangle\rangle}{dm} = -\frac{d\langle\langle\bar{q}q\rangle\rangle}{dM}\frac{dM}{dm} \tag{7.31}$$
$$\chi_{VS} \equiv \frac{\partial\langle\langle\bar{q}q\rangle\rangle}{\partial\mu_B} = \left(\frac{\partial\langle\langle\bar{q}q\rangle\rangle}{\partial M}\right)_{\mu_B}\frac{\partial M}{\partial\mu_B} + \left(\frac{\partial\langle\langle\bar{q}q\rangle\rangle}{\partial\mu_B}\right)_M. \tag{7.32}$$

ここで，χ_s はカイラル相転移の秩序変数のゆらぎ，したがって，シグマモードの伝播関数に対応していることに注意しよう．また，$\mu_B \neq 0$ のために荷電共役不変性が破れているために，スカラー-ベクトル混合項 χ_{VS} が有限になっている*1)．実際，$\mu_B = 0$ のとき $\chi_{VS}^{(0)} = 0$ である．

この連立方程式を解くと，

$$\chi_B = \frac{D_s^{-1}(0)\chi_B^{(0)} + 2g_s(\chi_{VS}^{(0)})^2}{D_s^{-1}(0)D_v^{-1}(0) + 4g_v g_s \chi_{VS}^{(0)}\chi_B^{(0)}} \tag{7.33}$$

を得る．ここに，

$$D_s^{-1}(0) = 1 - 2g_s\chi_s^{(0)}, \quad D_v^{-1}(0) = 1 + 2g_v\chi_B^{(0)}. \tag{7.34}$$

ただし，$D_s(q)$ および $D_V(q)$ はそれぞれスカラーおよびベクトルモードの伝播関数である．自己無撞着方程式から出発したので，結合定数が無限次取り入れられた表式が得られている．ダイアグラムで考えると，すべてのダイアグラムが取り入れられているわけではなく，いわゆるリング近似の表式になっている．

$\mu_B = 0$ のときには，スカラー-ベクトル混合がないので表式は簡単になる：

$$\chi_B = \frac{\chi_B^{(0)}(T)}{1 + 2g_V\chi_B^{(0)}(T)}. \tag{7.35}$$

一般に，カイラル対称性が回復しクォーク質量が減少すると χ_B は大きくなっていくが，$g_V > 0\,(g_V < 0)$ のとき，重粒子数感受率 χ_B は相互作用の効果で抑制される（増大される）ことが分かる．ここで，$\mu_B \neq 0$ のとき χ_B が等温圧縮率 κ_T に比例していることを思い出そう．すると，上記のことは，カイラル対称性が回復しクォーク質量が減少すると系は圧縮されやすく，密度ゆらぎが大きくなることを意味している．しかし，その密度揺らぎは，$g_V > 0\,(g_V < 0)$ のとき相互作用の効果で抑制される（増大される）のである．

7.6 まとめ

ここで見たことは，有限密度でのカイラル相転移は密度の「とび」を伴うので，QCD の臨界点付近はカイラル秩序変数のゆらぎとともに粒子数密度ゆらぎの増大によって特徴づけられるという非自明な事実である．したがって，スカラーモードだけではなく保存量である粒子数ゆらぎが興味ある物理量となる．粒子数は他の保存量（エネルギー-運動量など）とともに，いわゆる流体力学変数の組を構成している．したがって，QCD 臨界点では（相対論的）流体力学的観点による取り扱いが要求されることになる．このような観点での QCD 臨界点の特性についての研究については文献 [113], [115] を参照．ここでは簡単なコ

*1) 加えて，クォーク質量が有限であることも χ_{VS} が有限になるためには必要である．

メントにとどめる．QCD 臨界点では相転移が 2 次相転移になることを思い出そう．よく知られているように 2 次相転移点ではゆらぎが大きくなる（発散する）ので何らかの興味ある現象の存在が期待できる．その現象の有無を検証することは，QCD 相図の構造を実験的に検証することに他ならない．それでは何のゆらぎが大きくなるのであろうか？ すなわち，QCD 臨界点のソフトモードは何であろうか？ この問題については紆余曲折があったが現在では，QCD 臨界点でのソフトモードはバリオン密度ゆらぎであり，その普遍類は気-液相転移と同じ Z_2 であると考えられている[113],[115]．

おわりに

このテキストでは南部理論を基礎にしてクォークおよびハドロン物理学のいくつかの興味ある話題を解説するとともに，学部生でも困難なく読めるよう基礎的なことも紙数を厭わず説明した．しかしながら紙数の都合と著者の能力不足のために本来なら含めてもよいと考えられる多くの話題を割愛せざるを得なかった．たとえば，

- QCD の詳しい解説[2],[3],[20],[28]，特に，ゲージ場の位相幾何学的配位とそれを基礎にしたカイラル対称性の破れや軸性異常および閉じ込めの理論[6]，
- 格子ゲージ理論[21]，
- カイラル対称性の非線型表現[20],[28],[116],[117] およびそれを基礎にしたハドロン現象論[116]~[118]，
- 重粒子系におけるカイラル対称性の反映[119]~[121]，
- クォーク物質におけるカラー超伝導[88],[89] およびその前駆現象としてのクォークスペクトルの擬ギャップ[122]，
- クォーク物質におけるパイ凝縮を含む非一様相の実現可能性[123]~[125]，
- 有限温度・密度における閉じ込め-非閉じ込め相転移[107],[108] およびそのカイラル相転移との相関の有無[126]，
- 相対論的' 完全' 流体としての QGP[95]，およびその小さい輸送係数が可能であることの理由[127],[128]，
- 超相対論的重イオン衝突における初期条件と生成された QCD 物質の早い熱化（エントロピー生成）の起源[129]，

等々．さらに，南部理論の基礎である超伝導理論についても簡単に触れるべきであったが，紙数の都合で割愛した．そのことによりこのテキストが少しでも難解になったのではないかと懼れる．

しかしながら，上で列記した話題について学習するにしてもこのテキストで紹介した内容の多くは前提になると考える．このテキストの一部あるいは全部を学習された読者が上の各項目ごとに引用した文献を参考にしながらこれらの話題の学習・研究に進まれることを期待して結語としたい．

付録 A
非一様物質への相転移：核物質中の π 中間子凝縮を例題として

A.1 はじめに

高温，高密度ではQCDの真空構造の変化を伴う相転移，クォークやグルーオンの関わる相の研究が興味ある課題であることは6章ですでに述べた通りである．有限密度系におけるクォーク・ハドロン物理学の課題として，非一様物質への相転移の問題がある．実際，比較的低温度で高密度のQCD相が擬スカラーの秩序パラメーターの関与する非一様なクォーク物質になっている可能性が最近盛んに議論されている[123]~[125]．これは，カイラル相転移を伴ったクォーク相でのパイ中間子凝縮あるいはその「親類」とみなすことができる．これは，ただ単なる密度波ではなく，パリティやカイラル対称性などの内部対称性を破った秩序変数が空間依存性を持つ場合である．核物質中におけるそのような相転移は1970年代から80年代にかけてパイ中間子凝縮の問題として取り上げられた[93],[94],[130]．

ところで，フェルミ運動量 p_F の2倍 $2p_F = q$ を波数とする非一様な系への相転移は1次元系ではパイエルス転移[131]として古くから知られていることであり，固体の電子系の場合には電荷密度波生成の可能な原因として議論されている．また，スピンなど内部自由度と結合する場合はオーバーハウザー転移[132]と呼ばれる．これは後述するリンドハード関数[41] $\Phi(q/2p_f)$ の $q = 2p_F$ における空間次元に依存した特異性にも反映している*1)

ここではこのような非一様物質への相転移の典型例としてパイ中間子凝縮（以下，パイ凝縮と呼ぶ）を取り上げる．パイ凝縮は原子核（核物質）をハドロン多体系と見たときに，核子以外の自由度が発現する最初の例である．また，核物質で起こり得る自発的対称性の破れの興味ある例でもある．パイ中間子はパリティが負なので，パイ凝縮相ではパリティが破れている．また，p-波の相互

---

*1) 分かりやすい日本語の文献として，上村 洸，中尾憲司著「電子物性論—物性物理・物質科学のための」（新物理学シリーズ）（培風館 1995 年）．

作用の引力を取り入れるために，非一様なスピン・アイソスピン密度波が実現するので，スピン・アイソスピン対称性と空間の並進対称性が結合した形で破れている．そこではある種のスピン・アイソスピン波がNG ボソンとして現われるはずであるが，このように内部対称性と空間対称性の結合した NG モードの性質については十分解明されているとは言えず，今後の興味深い課題である．

A.2　2核子系の状態分類

陽子と中性子を総称して核子と呼ぶことは「序」で述べた．核子はスピン $\sigma = 1/2$ を持ち，フェルミオンである．2核子系では全スピンが $S = 1$ の 3 重項状態 $\chi_{1m}(\sigma_1, \sigma_2)$ または $S = 0$ の 1 重項状態 $\chi_{00}(\sigma_1, \sigma_2)$ を取りうる．たとえば，$S = 1$ および $S = 0$ の $S_z = 0$ の状態はそれぞれ以下のように書ける：

$$\chi_{10}(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle + |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle), \tag{A.1}$$

$$\chi_{00}(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle). \tag{A.2}$$

ここで注意すべき重要なことは，3 重項（1 重項）状態は粒子の入れ替え $(1 \leftrightarrow 2)$ に対して対称（反対称）であることである．全スピン演算子 $\boldsymbol{S} = \frac{\hbar}{2}(\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2)$ の 2 乗の計算から，スピン 3 重項（1 重項）状態に対して，$\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 = 1\ (-3)$ が言えるので，スピン 3 重項および 1 重項状態への射影演算子はそれぞれ

$$P_\sigma^1 = \frac{3 + \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2}{4}, \quad P_\sigma^0 = \frac{1 - \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2}{4} \tag{A.3}$$

となる．

陽子と中性子を核子という一つの粒子の異なる状態と考える．そして，核子の陽子と中性子状態を区別する量子数としてアイソスピン τ を導入する*2)．すなわち，$\tau = +1\ (-1)$ の状態を陽子（中性子）の状態と指定し，抽象的な 2 次元スピノル空間を形成するとみなす：

$$\psi_N(\boldsymbol{r}, \tau) = \begin{pmatrix} \varphi_p(\boldsymbol{r}, \sigma) \\ \varphi_n(\boldsymbol{r}, \sigma) \end{pmatrix}.$$

その根拠は核力の荷電独立性にある．すなわち，核子間の相互作用はこの抽象的空間の回転に対してほとんど不変である．2 核子系はスピンと同様にアイソスピン 3 重項と 1 重項 の状態を取りうる．

さて，フェルミオンである核子の 2 体系は粒子座標 $\xi_i\ (i = 1, 2)$ の入れ替えに対して反対称でなければならない．ここで，粒子の座標は空間座標 $\boldsymbol{r}_i\ (i = 1, 2)$ だけではなく，スピンとアイソスピンを含んでいる：

---

*2)　同じ核子数（重さ）を持つ状態を表すのだから本来はアイソバリックスピンと呼ぶべきであるが，慣例に従う．アイソトープとは周期律表の同じ場所（トポス）を表すのだから陽子数が同じでなければならない．

$$\Psi(\xi_1,\, \xi_2) = \psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)\chi_{S\, m_s}(\sigma_1,\, \sigma_2)\chi_{T\, m_T}(\tau_1,\, \tau_2).$$

相対座標 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ は粒子の入れ替えに対して符号を変える．すなわち，空間座標の入れ替えはパリティ変換と同じである．相対軌道角運動量が l のとき，パリティは $(-1)^l$ であるから，パリティの偶，奇は空間座標の入れ替えによる正，負に対応する．したがって，スピン 3 重項でパリティが正（偶: Even）の状態を ^3E などと書くことにする．他には，^1E，^3O そして ^1O の状態がある．これらの記号を用いると，全アイソスピン $T = 0\,(T = 1)$ のとき，スピンと空間部分は ^3E または $^1O\,(^3O$ または $^1E)$ でなければならない．この 4 つの状態は $(T,\, S) = (0,\, 1),\, (0,\, 0),\, (1,\, 1),\, (1,\, 0)$，に対応する．たとえば $(T,\, S) = (0,\, 1)$ 状態への射影演算子 $P^{01}_{\tau\sigma}$ は次のように与えられる：

$$P^{01}_{\tau\sigma} = \frac{1 - \boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2}{4}\frac{3 + \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2}{4}. \tag{A.4}$$

[問い] 他の 3 つの状態への射影演算子 $P^{00}_{\tau\sigma}$, $P^{11}_{\tau\sigma}$, $P^{10}_{\tau\sigma}$ を書き下せ．

核力は中心力，非中心力（スピン・軌道力やテンソル力等）を含み，それらがさらに $(T,\, S)$ の組み合わせ毎に異なる．2 核子系の唯一の結合状態は陽子と中性子が結合した重陽子である．その相対波動関数は $^3S_1$ を主成分とし小さい成分ながら $^3D_1$ 状態を含んでいる．すなわち，上で導入した記号を用いれば ^3E の状態であり，全アイソスピンは $T = 1$ である．中心力は ^1E の状態の方が ^3E よりも引力が大きい．2 中性子系は ^1E の状態を取りうる．ところが，2 中性子系は低エネルギーで強い引力が働くが結合系は存在しない．それではなぜ引力の弱い ^3E 系である重陽子が結合系として存在するのであろうか？その謎を解くのが 1 パイ中間子交換力を主な起源とするテンソル力の存在である．

A.3 パイ中間子交換力と核物理学の基礎

パイ中間子と核子の結合は擬ベクトル（pseudovector）-結合（pv-結合）

$$\mathcal{H}_{\rm pv} = f/m_\pi \cdot \bar{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\tau^k\psi\partial_\mu\varphi_k,$$

で与えられる．これはカイラル対称性の非線型表現を取ったことを意味する．擬スカラー（pseudoscalar）-結合（ps-結合）

$$\mathcal{H}_{\rm ps} = g_\pi\bar{\psi}i\gamma_5\tau^k\psi\varphi_k$$

の場合はシグマ中間子を同時に導入してカイラル対称な形にしておかなければならない．これらの非相対論的極限はともに

$$\mathcal{H}_{\rm pv} \to f/m_\pi \cdot \psi^\dagger\boldsymbol{\sigma}\tau^k\psi\nabla\varphi_k$$

となる．ただし，オンシェルの核子に対して ps-結合と pv-結合定数の間に次の関係式が成り立っている：

$$\frac{f}{m_\pi} = \frac{g}{2m_N}. \tag{A.5}$$

これは，ps-結合と pv-結合の等価定理 (equivalence theorem) と呼ばれる．

パイ場の微分が核子と結合し，部分波展開したとき $l = 1$ から始まるので p-波結合という．

テンソル力の主な起源は 1 パイ中間子交換力 (One-Pion-Exchange Potential; OPEP) である．2 つの核子が位置 $\boldsymbol{r}_i$ $(i = 1, 2)$ に静止している場合の系のエネルギー $V(1,2)$ として求めることができる．系のラグランジアンのうちパイ中間子の関与する部分は

$$\mathcal{L}_\pi = \frac{1}{2}\{(\partial_\mu \boldsymbol{\varphi}_\pi)^2 - m_\pi^2(\boldsymbol{\varphi})^2\} - \frac{f}{m_\pi}\psi_N^\dagger \tau_\alpha \boldsymbol{\sigma}\cdot\psi_N \boldsymbol{\nabla}\varphi_{\pi\alpha}$$

と与えられる．これより，パイ場の従う運動方程式は

$$(\partial_t^2 - \Delta + m_\pi^2)\varphi_{\pi\,\alpha} = \frac{f}{m_\pi}\psi_N^\dagger \tau_\alpha \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nabla}\psi_N$$

である．静的近似を行うと $\boldsymbol{r}_1$ にある核子場によって誘起されるパイ場は次の方程式で与えられる：

$$(m_\pi^2 - \Delta)\varphi_{\pi\,\alpha}^{(1)} = \frac{f}{m_\pi}\tau_\alpha^{(1)}\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\nabla}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1). \tag{A.6}$$

フーリエ変換の方法で解くと，

$$\begin{aligned}\varphi_{\pi\,\alpha}^{(1)}(\boldsymbol{r}) =&\ \frac{f}{m_\pi}\tau_\alpha^{(1)}\int\frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3}\frac{i\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{k}\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}}{m_\pi^2+k^2}\\ =&\ \frac{f}{m_\pi}\tau_\alpha^{(1)}\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\nabla}\frac{\mathrm{e}^{-m_\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}.\end{aligned} \tag{A.7}$$

系のエネルギーとしてのポテンシャル $V(1,2) \equiv V_\pi(1,2)$ は

$$\begin{aligned}V_\pi(1,2) =&\ -\int d^3\boldsymbol{r}\sum_\alpha \frac{f}{m_\pi}\tau_\alpha^{(1)}(\boldsymbol{\sigma}_2\cdot\boldsymbol{\nabla}_2)\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2)\varphi_{\pi\,\alpha}^{(1)}(\boldsymbol{r})\\ =&\ -\left(\frac{f}{m_\pi}\right)^2\boldsymbol{\tau}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\tau}^{(2)}(\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\nabla}_1)(\boldsymbol{\sigma}_2\cdot\boldsymbol{\nabla}_2)\frac{\mathrm{e}^{-m_\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}}{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|}\end{aligned} \tag{A.8}$$

となる．これがOPEP である．少し計算した後デルタ関数部分を除くと，OPEP は以下のように書ける：

$$V_\pi(\boldsymbol{r}) = f^2 m_\pi \frac{\boldsymbol{\tau}_1\cdot\boldsymbol{\tau}_2}{3}\big[(\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_2)Y(m_\pi r) + S_{12}(\hat{\boldsymbol{r}})Z(m_\pi r)\big]. \tag{A.9}$$

ただし，

$$Y(x) = \exp(-x)/x, \quad Z(x) = (1 + 3/x + 3/x^2)Y(x). \tag{A.10}$$

ここで,

$$S_{12}(\hat{\boldsymbol{r}}) = 3(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{r}})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \hat{\boldsymbol{r}}) - (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) \tag{A.11}$$

に比例するポテンシャルをテンソル力と呼んでいる.

テンソル力の導出は簡便に以下のように理解することもできる. OPEP のフーリエ成分の分子は

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{q})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \boldsymbol{q}) &= \frac{1}{3}(3\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{q}\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \boldsymbol{q} - q^2\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) + \frac{1}{3}q^2\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 \\ &= \frac{1}{3}S_{12}(\boldsymbol{q}) + \frac{1}{3}q^2\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 \end{aligned} \tag{A.12}$$

となる. 逆フーリエ変換をすると, 第1項がテンソル力を, 第2項が中心力（デルタ関数部分を含む）を与える.

テンソル力は非中心力の一種であり, 2 核子のスピン $\boldsymbol{\sigma}_{1,2}$ と相対位置座標 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ の方向 $\hat{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}/r$ それぞれについての2階の既約（球）テンソルから作ったスカラー演算子に依存する演算子に比例している. また, このことがテンソル力という名前の由来である：$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ をそれぞれ L_1, L_2 階の既約テンソルとすると, これらから作った L 階の既約テンソル $\boldsymbol{T}^{(L)}$ の M 成分はクレブッシュ–ゴルダン係数を用いて

$$T_M^{(L)} = \sum_{M_1+M_2=M} (L_1\, M_1\, L_2\, M_2 | L\, M) A_{M_1} B_{M_2} \tag{A.13}$$

と書ける. これを, $\boldsymbol{T}^{(L)} = [\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}]^{(L)}$ と表す. この記号を使うと,

$$\begin{aligned} S_{12}(\hat{\boldsymbol{r}}) &= 3\sqrt{5}\left[[\boldsymbol{\sigma}_1 \times \boldsymbol{\sigma}_2]^{(2)} \times [\hat{\boldsymbol{r}} \times \hat{\boldsymbol{r}}]^{(2)}\right]^{(0)} \\ &= 3[\boldsymbol{\sigma}_1 \times \boldsymbol{\sigma}_2]^{(2)} \cdot [\hat{\boldsymbol{r}} \times \hat{\boldsymbol{r}}]^{(2)} \end{aligned} \tag{A.14}$$

と表すことができる. スピン演算子 $\boldsymbol{\sigma}_i$ および相対座標単位ベクトル $\hat{\boldsymbol{r}}$ はともに1階のテンソルであることに注意しよう.

さて, テンソル演算子 S_{12} がスピンについて2階既約テンソルであるために, S_{12} がスピン1重項状態に作用すると0になる. 実際,

$$\langle S\, m_s | S_{12} | 00 \rangle = \sum_\mu (2\,\mu\, 2\ -\mu | 00) [\hat{\boldsymbol{r}} \otimes \hat{\boldsymbol{r}}]^{(2)}_{-\mu} \langle S\, m_S | [\boldsymbol{\sigma} \otimes \boldsymbol{\sigma}]^{(2)}_\mu | 00 \rangle.$$

ところが, $S = 1$ または 0 だから

$$\langle S\, m_S | [\boldsymbol{\sigma} \otimes \boldsymbol{\sigma}]^{(2)}_\mu | 00 \rangle \propto (0\, 0\, 2\, \mu | S\, m_S) = 0.$$

ところが, $\langle 1\, m_s | S_{12} | 1\, m'_S \rangle \neq 0$ なので, テンソル力は ^3E の状態である重陽子系には有限の行列要素を持つ. 空間部分も2階の既約テンソルであるから, テンソル力により $l = 0$ と $l = 2$ の状態が結合する. この結合のために,

$$^3S_1 \rightarrow {}^3D_1 \rightarrow {}^3S_1 \tag{A.15}$$

の量子過程により大きな付加的な中心力が誘起される．こうして，^3E 状態における正味の中心力は ^1E 状態のものよりも大きくなる．これが，2 中性子系ではなく，陽子-中性子 2 体系である重陽子が唯一の核子 2 体結合系となる理由である．

この強いテンソル力を含むパイ中間子交換力は原子核の結合機構を実現する上でも本質的な役割を果たしている．原子核物質には密度と結合エネルギーの飽和性という顕著な性質がある．すなわち，原子核の中心の密度および 1 粒子あたりの結合エネルギーが核子数によらず一定であり，原子核は液滴のような性質を持っている．原子核は量子液体[86]の状態にあると言える．原子核は陽子と中性子というフェルミオンからなる多体系であり，パウリの排他律（パウリ原理）が働いている．原子核現象，特に，その低エネルギー現象はテンソル力とこのパウリ原理の織りなす結果であり，この 2 つを主要な原因として核物質の結合エネルギーと密度の飽和性や軽い核でのアルファクラスター構造[93],[133],[134]*3)が実現している．

原子核の飽和密度（標準核密度）は $\rho_0 = 0.17\,\mathrm{fm}^{-3}$ と低密度である．実際，対応する核子間距離は 1.8 fm であり，パイ中間子のコンプトン波長 ($\hbar/m_\pi c \sim 1.4\,\mathrm{fm}$) より長い．通常の核物質や原子核においては，テンソル力の期待値はゼロであるが，その 2 次の摂動がもたらす量子効果が系の結合に大きく寄与する．摂動の中間状態では背景の核子系の存在によるパウリの排他律が働き，このテンソル力の 2 次の効果は特異的な密度依存性を持つ：無限核子系の場合，(A.15) に対応する過程はフェルミ球内の運動量 $\boldsymbol{p}_i$ $(i = 1, 2)$ を始状態として以下のように書ける*4)：

$$(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2) \to (\boldsymbol{p}'_1, \boldsymbol{p}'_2) \to (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2).$$

ただし，重要なのはパウリ原理のために p'_i $(i = 1, 2)$ がフェルミ運動量 $p_{\scriptscriptstyle F}$ より大きくなければならないことである：

$$p_{\scriptscriptstyle F} < p'_i.$$

系の密度を ρ とすると

$$\rho = g\frac{p_{\scriptscriptstyle F}^3}{3\pi^2}.$$

ただし，縮退因子 g は対称核物質 $(Z = N)$ の場合 $g = 2$，中性子物質 $(Z = 0)$ の場合 $g = 1$ である．このようにして，パウリ原理とテンソル力の効果のために結合エネルギーに密度依存性が現われ，核物質の結合エネルギーと密度の飽和性が半定量的に理解できることになる．そしてこれが $\rho = \rho_0$ という比較的

---

*3) アルファクラスター構造とテンソル力との関係は，たとえば，以下の論文で議論されている；H. Bando, S. Nagata and Y. Yamamoto, Prog. Theor. Phys. **44** (1970) 646.

*4) 以下の議論は背景に Brueckner の「反応行列理論[93],[133]」を想定している．

低密度で核物質の結合エネルギーと密度の飽和性が実現する第一義的な原因である[93],[133]：ただし，より高密度では核子間の p 波の斥力効果，そして中心部の斥力コアが高密度領域での核物質の安定性に寄与している．このことは原子核の存在（すなわち，われわれの存在）およびその性質がQCDの基本的性質の一つであるカイラル対称性の反映であることを示唆している．

2核子間の中間レインジではスカラー中間子やベクトル中間子 ρ，ω の交換として要約できる相互作用が重要になる．ベクトル中間子と核子の結合の仕方にはベクトル結合とテンソル結合がある．「ベクトル中間子支配 (Vector-Meson Dominance：VMD) 仮説[14],[15]」に基づく核子の電磁形状因子の分析に基づけば，アイソスピン3重項をなすロー中間子と核子の結合はテンソル型

$$\mathcal{H}_{\rho\mathrm{N}} = f_\rho/m_\rho \cdot \bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\tau^k\psi(\partial^\mu\rho_k^\nu - \partial^\nu\rho_k^\mu),$$

アイソススピン1重項のオメガ中間子はベクトル結合

$$\mathcal{H}_{\omega\mathrm{N}} = g_\omega\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\omega_\mu$$

がそれぞれ**支配的である**．このうちテンソル結合の非相対論的極限はフーリエ成分は

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\sigma}_1\times\boldsymbol{q})\cdot(\boldsymbol{\sigma}_2\times\boldsymbol{q}) &= \boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{q}^2 - \boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{q}\boldsymbol{\sigma}_2\cdot\boldsymbol{q}\\ &= -\frac{1}{3}S_{12}(\boldsymbol{q}) + \frac{2}{3}q^2\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_2\end{aligned} \tag{A.16}$$

となり，ロー中間子交換力がOPEPと逆符号のテンソル力を与えることが分かる（中心力は同符号）．こうして，現実的核力においてはパイ中間子交換とロー中間子交換の競合でテンソル力の強さとレインジが定まることになる．

核子とのテンソル結合により，ロー中間子は核子系のスピン・アイソスピン密度の横波成分に結合するので，高密度ではロー中間子凝縮というものを考えることができる．その場合，核子系（より一般には重粒子系）はパイ凝縮相とは異なるスピンの交代的層状構造を取る[135]．

QCDとテンソル力との関連について簡単な注意：

1. 上記の議論の基礎となった，VMDの成立起源はQCDのカイラル対称性の自発的破れを前提として，「隠れた局所対称性 (Hidden Local Symmetry)」の理論により部分的な説明を行うことができる[136]．
2. 実は，核力を記述するのに必要なロー中間子-核子結合定数は電磁構造から引き出されるものの2倍ほどになっている．この違いの起源は核子の内部構造を反映したものでカイラル対称性が重要な役割を果たしているかもしれない[137]．

A.4 パイ中間子凝縮とテンソル力

ここでのパイ中間子凝縮とは核子媒質中においてパイ中間子場が平衡状態において有限の期待値 $\langle\varphi_k\rangle \neq 0$ $(k=0, \pm)$ を持つことである．ここではまず，π-N 結合だけを考えた場合の次の簡単なハミルトニアンを用いて，パイ中間子凝縮の基本的事項を説明する．

$$\begin{aligned} H &= \int d^3\boldsymbol{x}\big[\psi^\dagger(x)\hat{T}\psi(x) + \tilde{f}\psi^\dagger(x)\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\tau}^k\psi(x)\nabla\varphi_k(x) \\ &\quad +1/2\cdot\{\dot{\varphi}^2 + (\vec{\nabla}\varphi)^2 + m_\pi^2\varphi^2)\}\big], \\ &\equiv H_{\mathrm{N}} + H_{\pi-\mathrm{N}} + H_\pi. \end{aligned} \tag{A.17}$$

ここに，$\hat{T} = -\nabla^2/2m_N$ は核子（N）の運動エネルギー演算子，$\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3)$ はアイソスピン 3 重項のパイ中間子場，$\boldsymbol{\tau} = (\tau_1,\ \tau_2,\ \tau_3)$ はアイソスピンに対するパウリ行列である．ハミルトニアンの第 2 項は p-波のパイ-N 結合である．ただし，$\tilde{f} = f/m_\pi$ とおいた．

以下では，$\langle\varphi_0\rangle \neq 0$ として中性パイ中間子凝縮に話を限ることにする．この場合，平均場近似での運動方程式は $(\xi = (\boldsymbol{r}, \sigma, \tau))$,

$$i\partial_t\psi(t,\xi) = \left[\hat{T} + \tilde{f}\tau_3\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla\langle\varphi_0(\boldsymbol{r})\rangle\right]\psi(t,\xi), \tag{A.18}$$

$$(\nabla^2 - m_\pi^2)\langle\varphi_0(\boldsymbol{r})\rangle = \tilde{f}\nabla\cdot\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}), \tag{A.19}$$

ただし，

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}) \equiv \langle\psi^\dagger(x)\boldsymbol{\sigma}\tau_3\psi(x)\rangle \tag{A.20}$$

は核子系の作るスピン・アイソスピン密度であり，その空間微分がパイ場の源になっている．したがって，方程式 (A.19) は，パイ凝縮 $(\langle\varphi_0\rangle \neq 0)$ が実現するためには核子系が構造相転移を起こし，空間座標に依存する非一様なスピン・アイソスピン密度波が実現していなければならないことを示している：

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}) \equiv \boldsymbol{\nabla}\cdot\langle\psi^\dagger(x)\boldsymbol{\sigma}\tau_3\psi(x)\rangle \neq 0.$$

逆に，パイ凝縮相での核子系は古典場としてのパイ場と p-波結合しているために 1 核子の固有状態 $\phi_\alpha(\xi)$ は運動量の混合が起こっている：

$$\left[\hat{T} + \tilde{f}\tau_3\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla\langle\varphi_0(\boldsymbol{r})\rangle\right]\phi_\alpha(\xi) = \epsilon_\alpha\phi_\alpha(\xi). \tag{A.21}$$

実現する古典パイ場が1つの波数で特徴付けられるサインまたはコサイン三角関数で表されるとき，対応する核子系の構造は「交代的層状スピン (Alternating-Layer Spin; ALS) 構造」と呼ばれた [138]．

パイ中間子凝縮相が核子系のスピン・アイソスピン秩序相になっていることは，そのエネルギーの表式にも表れ，パイ中間子の自由度の関与する系のエネ

ルギーは次の2通りで書ける：

$$\langle H_{\pi-\mathrm{N}} + H_\pi \rangle = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}^{\mathrm{occ}} \langle \phi_\alpha(1)\phi_\beta(2)|V_\pi(1,2)|\phi_\alpha(1)\phi_\beta(2)\rangle, \tag{A.22}$$

$$= -\frac{1}{2}\int d^3\boldsymbol{x}\{(\nabla\varphi_0(\boldsymbol{r}))^2 + m_\pi^2\varphi_0(\boldsymbol{r})^2\}. \tag{A.23}$$

ここで，occ は占有された状態についての和を表す．前者の表式は核子の波動関数のみで書かれていて核子系の構造相転移の側面を，後者はパイ場のみで書かれていてパイ中間子の凝縮という側面を強調したものになっている．

具体的に上記の結合方程式を解いて核子系の波動関数を具体的に求め，エネルギーを計算した分析結果によると，パイ中間子凝縮が起こる場合のエネルギー利得は OPEP のテンソル力によりほとんど与えられており，パイ中間子凝縮相は「テンソル力が支配的な相 (Tensor-force Dominating Phase)」であることが分かった．

実際は，内側のレインジでロー中間子交換によりテンソル力は弱められ，また，その他の核子間相互作用そして短距離相関も取り入れると，核子だけではパイ中間子を凝縮させることはできない．

しかし，パイ中間子の古典場が存在すると，パイ-核子系と強く結合するバリオン共鳴状態 Δ(1232) が基底状態で核子と混合することになりパイ凝縮相での重粒子系は核子 N とデルタ共鳴 Δ(1232) の線型結合 $\tilde{N} = uN - v\Delta$ で表される準バリオンのフォック状態として記述するのが正当となる[139]．このことが凝縮実現に必要なエネルギー利得を供給し対称核物質の場合，臨界密度 $\rho_c \simeq 2.2\rho_0$ あたりでパイ中間子凝縮が起こることが示されている．そこでも，Δ(1232) との結合により数十パーセント増大したテンソル力がパイ凝縮相のほとんどのエネルギー利得を与えていることには変わりがない．

以下では，このような現実的な取り扱いを紹介することはやめ，グリーン関数を用いる計算の例として簡単な模型を用いた取り扱いを紹介する．核子系は非相対論的として扱う*5)．また，アイソバー Δ(1232) の自由度も無視する．

A.5 模型ハミルトニアン

パイ中間子と核子系を扱う模型ハミルトニアンとして以下のものを取る：

$$H_{\mathrm{model}} = H_{\mathrm{N}} + H_{\pi-\mathrm{N}} + H_\pi + H_{\mathrm{LL}}. \tag{A.24}$$

ただし，

$$H_{\mathrm{LL}} = g'/2 \cdot \int d^3\boldsymbol{x}\,(\psi^\dagger(x)\boldsymbol{\sigma\tau}\psi(x))^2, \tag{A.25}$$

*5) 相対論的な取り扱いは以下を参照: B.Banerjee, N. K. Glendenning and M. Gyulassy, Nucl. Phys. A **361** (1981) 326.

は核子間に働くスピン・アイソスピンチャンネルの相互作用でパイ中間子交換に帰着されない斥力効果を表すものとして導入した．核物質内の核子をランダウの意味での準粒子と考え，この斥力の強さを与えるパラメーター g' はランダウ–ミグダルパラメーターと呼ばれる：実験的には $g' \approx 0.4$–0.7 とされる[140]．しかしながら，パイ凝縮に関わる核子間相互作用は現実にはこのようなデルタ関数型の相互作用には帰着しきれないことは注意すべきである．ここでは，あくまでもパイ凝縮の実現する「論理」を鮮明にするためにこのような簡単な相互作用を用いている．

A.6 π^0 凝縮の臨界条件

中性パイ場 π^0 場の場合に限って，パイ凝縮の臨界条件を考察してみよう．ここでは，上で見たように核子系のパイ凝縮が核子のスピン・アイソスピン密度波（$\sigma\tau$-密度波）の実現と同値であることを基礎にして，核子系の構造相転移の問題として考察してみよう．そのために，外場をかけて系に $\sigma\tau$-密度波 $\langle\psi^\dagger\sigma_z\tau_z\psi\rangle \equiv S_{\sigma\tau}(\boldsymbol{r})$ を実現させ，エネルギーの変化を評価してみる．無限小の大きさの外場で $S_{\sigma\tau}(\boldsymbol{r})$ が有限になるとき，**自発的に**，スピン・アイソスピン密度波が実現すると考えられる．以下で見るように，これはフェルミ球の歪みによる運動エネルギーの増大と g' による斥力効果よりも OPEP による π-核子間の引力の効果が大きくなるときに起こる．この臨界条件を求める．

以下では自己無撞着平均場理論を適用して初等的にこの臨界条件を解析する*6)．

A.6.1 外場の導入と系のエネルギーの一般表式

系のハミルトニアンを H とする．H の固有値を E_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ とし，対応する規格化された固有状態を $|n)$ と書く：$H|n) = E_n|n)$, $(n|m) = \delta_{nm}$.

さて，系に $\sigma\tau$-密度波を誘起するため，外場 $\lambda\cos\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r} = \lambda\cos qz$ を導入しよう．ただし，$\sigma\tau$-密度波は z 軸方向の波数を持つとした；$\boldsymbol{q} = (0, 0, q)$．この外場と系との相互作用 $\lambda H_{\rm ex}$ を次のように与える：

$$\lambda H_{\rm ex} = \lambda\int d\boldsymbol{x}\psi^\dagger(x)\sigma_z\tau_z\psi(x)\cos qz. \tag{A.26}$$

全ハミルトニアンは

$$H_\lambda \equiv H + \lambda H_{\rm ex}. \tag{A.27}$$

外場があるときの系のエネルギーの変化

*6) この解析は著者独自のもので大学での講義以外公にされたものとしてはこれが初出である．これは場の理論による有効ポテンシャルの方法を初等化したものとみなすことができる．

まず，外場が系に加わったときのエネルギーの変化に対する一般的表式を摂動論の範囲で求めて見よう．

H_λ の基底状態を $|\lambda\,\rangle$，その固有値を $W[\lambda]$ と書くことにする：

$$H_\lambda|\lambda\rangle = W[\lambda]|\lambda\rangle. \tag{A.28}$$

このとき，$W[0] = E_0$，$|0\rangle = |0)$．状態 $|\lambda\rangle$ およびエネルギー $W[\lambda]$ を λ について展開する：

$$|\lambda\rangle = |0\rangle + \lambda|1\rangle + \lambda^2|2\rangle + \cdots,\ W[\lambda] = E_0 + \lambda W_1 + \lambda^2 W_2 + \cdots.$$

これを (A.28) に代入して通常の摂動論の作業を行うと $W_1 = 0$ および

$$|1\rangle = \sum_{n\neq 0} \frac{(n|H_{\rm ex}|0)}{E_0 - E_n}|n), \quad W_2 = \sum_{n\neq 0} \frac{|(n|H_{\rm ex}|0)|^2}{E_0 - E_n} \tag{A.29}$$

を得る．ただし，$\langle 0|H_{\rm ex}|0\rangle = 0$ に注意する．

これらを用いると，外場ハミルトニアンの期待値は

$$\langle\lambda|H_{\rm ex}|\lambda\rangle \simeq 2\lambda W_2. \tag{A.30}$$

ここで，(A.29) を用いた．

$|\lambda\rangle$ は外場によりスピン-アイソスピン演算子 $\psi^\dagger(x)\sigma_z\tau_z\psi(x)$ が期待値を持つ「分極」した状態である．この状態での系固有のエネルギーは

$$E[\lambda] \equiv \langle\lambda|H|\lambda\rangle \simeq E_0 - \frac{1}{2}\langle\lambda|\lambda H_{\rm eq}|\lambda\rangle \tag{A.31}$$

となる．すなわち，外場の存在による系のエネルギーの変化は

$$\begin{aligned} \delta E \equiv & -\frac{1}{2}\langle\lambda|\lambda H_{\rm eq}|\lambda\rangle \\ = & -\frac{1}{2}\lambda\int d\boldsymbol{x}\langle\lambda|\psi^\dagger(x)\sigma_z\tau_z\psi(x)|\lambda\rangle\cos qz \end{aligned} \tag{A.32}$$

となる．最後の等式で (A.26) を代入した．

A.6.2 運動方程式と平均場近似

ハイゼンベルグ方程式は

$$\begin{aligned} i\partial_t\psi(x) = \Big[\hat{T} + \tilde{f}\boldsymbol{\sigma\tau}\cdot\boldsymbol{\nabla\varphi}(x) & + g'(\psi^\dagger\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\tau}\psi)\boldsymbol{\sigma\tau} \\ & + \lambda\sigma_z\tau_z\cos qz\Big]\psi(x), \end{aligned} \tag{A.33}$$

$$(-\partial_t^2 + \boldsymbol{\nabla}^2 - m_\pi^2)\boldsymbol{\varphi}(x) = -\tilde{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\psi^\dagger(x)\boldsymbol{\sigma\tau}\psi(x)\right). \tag{A.34}$$

$\lambda H_{\rm ex}$ により，系に $\sigma\tau$-密度波および π 場の古典場が誘起される．意味のある最低次の近似としてこれらの古典場を平均場として取り入れよう．すなわち，以下のように近似する：

$$\psi^\dagger(x)\boldsymbol{\sigma\tau}\psi(x) \to \langle\lambda|\psi^\dagger(x)\sigma_z\tau_3\psi(x)|\lambda\rangle\,\hat{z}\delta_{i3}, \tag{A.35a}$$

$$\varphi_i(x) \to \langle\lambda|\varphi_3(x)|\lambda\rangle\,\delta_{i3}. \tag{A.35b}$$

さらに，誘起される場に対して外場の線型近似の範囲で考察する：

$$\langle\lambda|\psi^\dagger(x)\sigma_z z_3\psi(x)|\lambda\rangle \equiv S_{\sigma\tau}(\boldsymbol{r}) \simeq \lambda D_{\sigma\tau}\cos qz, \tag{A.36a}$$

$$\langle\lambda|\varphi_3(x)|\lambda\rangle \simeq \lambda\bar{\varphi}\sin qz. \tag{A.36b}$$

ここで，$D_{\sigma\tau}$ と $\bar{\varphi}$ は自己無撞着に決められるべき振幅である．この自己無撞着性により非摂動的な効果が取り入れられる．ただし，$\bar{\varphi}$ と $D_{\sigma\tau}$ は独立ではない．実際，平均場近似した (A.34) 式に (A.36a, A.36b) を代入すると，

$$\bar{\varphi} = \bar{f}qD_{\sigma\tau}/\omega_q^2, \qquad (\omega_q^2 = m_\pi^2 + q^2) \tag{A.37}$$

を得る．

平均場近似した核子場の運動方程式 (A.33) は，

$$i\partial_t\psi(x) = \left[\hat{T} + \lambda U(z,\ \sigma_z,\ \tau_z)\right]\psi(x) \tag{A.38}$$

となる．ただし，

$$U(z,\ \sigma_z,\ \tau_z) = U_0\sigma_z\tau_z\cos qz\ U_0 = 1 + (v_\pi(q) + g')\,D_{\sigma\tau}. \tag{A.39}$$

ここに，$v_\pi(q) = -(\bar{f}q)^2/\omega_q^2$ は OPEP のフーリエ変換である．

期待値の計算をグリーン関数を用いて効率的に行おう．次のように全グリーン関数 G_λ を導入する：

$$G_\lambda(x,\ x') = -i\left\langle\lambda|T\left(\psi(x)\psi^\dagger(x')\right)|\lambda\right\rangle. \tag{A.40}$$

(A.38) より，G_λ は G_0 を含む次の積分方程式を満たすことが分かる：

$$G_\lambda(x,\ x') = G_0(x-x') + \int d^4y\,G_0(x-y)\lambda U(y_3,\ \sigma_z,\ \tau_z)G_\lambda(y,\ x'). \tag{A.41}$$

[問い] (A.41) が成り立つことを示せ．[ヒント] $(i\partial_t - \hat{T})\psi_0(x) = 0$ より，$(i\partial_t - \hat{T})G_0(x-x') = \delta^4(x-x')$ が成り立つことを用いよ．

(A.38) に従う $\psi(x)$ の下で誘起される $\sigma\tau$-密度波 $S_{\sigma\tau}(\boldsymbol{r})$ を求めよう．そのためには次のように $|\lambda\rangle$ での $\sigma\tau$-密度の期待値を求めればよい：

$$\begin{aligned} S_{\sigma\tau}(\boldsymbol{r}) &= \langle\lambda|\psi^\dagger(x)\sigma_z\tau_z\psi(x)|\lambda\rangle \\ &= -i\lim_{x'\to x+}\mathrm{Tr}\left[\sigma_z\tau_z G_\lambda(x,\ x')\right] \\ &= -i\lim_{x'\to x+}\mathrm{Tr}\Big[\sigma_z\tau_z\int d^4y G_0(x-y)\,\lambda U(y_3,\ \sigma_z,\ \tau_z)G_\lambda(y,\ x')\Big]. \end{aligned} \tag{A.42}$$

以下のことに注意しよう．(A.42) 右辺中の $U(y,\ \sigma_z,\ \tau_z)$ は $S_{\sigma\tau}(\boldsymbol{r})$ の振幅 $D_{\sigma\tau}$ を含んでいる．(A.42) は仮定した $\sigma\tau$-密度波 $S_{\sigma\tau}(\boldsymbol{r})$ が自己無撞着に $\sigma\tau$-密度波を与えるべしという条件である．自己無撞着条件と呼ばれる．

(A.42) の計算を具体的に行ってみよう．λ について線型近似をし，$S_{\sigma\tau}(\boldsymbol{x}) = 4\lambda U_0 s_{\sigma\tau}(\boldsymbol{x})$ と書くと，

$$s_{\sigma\tau}(\boldsymbol{x}) = \cos \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}\left(-i\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}G_0(p_0,\ \boldsymbol{p})G_0(p_0,\ \boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})\right). \qquad \text{(A.43)}$$

ここに現れた 1 ループの計算をすると

$$\begin{aligned} -i\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}G_0(p_0,\ \boldsymbol{p})G_0(p_0,\ \boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}) = & \ -(N_F/4)\cdot\Phi(q/2p_{_F}) \\ \equiv & \ D_0(q)/4 \end{aligned} \qquad \text{(A.44)}$$

となる．ただし，$N_F = 2m_N p_{_F}/\pi^2$ は対称核物質のフェルミ面における状態密度であり，

$$\Phi(x) = 1/2 + (1-x^2)/4x\cdot\ln|(1+x)/(1-x)| \quad (\Phi(0)=1). \qquad \text{(A.45)}$$

$\Phi(x)$ はフェルミオン系の 1 ループ計算を特徴付ける関数で，リンドハード (Lindhard) 関数と呼ばれる．結局，

$$S_{\sigma\tau}(\boldsymbol{r}) = \lambda U_0 D_0(q)\cos qz \qquad \text{(A.46)}$$

となる．これを自己無撞着条件 (A.36a) に代入して，

$$D_{\sigma\tau} = U_0 D_0(q) \qquad \text{(A.47)}$$

を得る．さらに，(A.39) を (A.47) に代入すると $D_{\sigma\tau}$ が次のように得られる：

$$D_{\sigma\tau} \equiv D_{\sigma\tau}(q) = \frac{D_0(q)}{1-(v_\pi(q)+g')D_0(q)}. \qquad \text{(A.48)}$$

これが求めたかった結果である．1 ループの計算しかしていないが，自己無撞着条件のために結合定数について無限次の効果を含んでいることに注意しよう．これはいわゆる乱雑位相近似 (Random-Phase Approximation：RPA) の結果である．

A.6.3 臨界条件

(A.48) を解析することにより，パイ凝縮の臨界条件を求めて見よう．そのため分母をここに書き下す：

$$1+\left(-(\tilde{f}q)^2/\omega_q^2+g'\right)N_F\Phi(q/2p_{_F}). \qquad \text{(A.49)}$$

$N_F\Phi(q/2p_{_F})$ は正の数であるから，g' の効果を凌駕する十分大きい波数 q に対して第 2 項は負となる．さらに，状態密度 N_F はフェルミ運動量 $p_{_F}$ に比例す

るから系の密度が大きくなるほど (A.48) の分母は減少し，g' の大きさによっては 0 となる．($\Phi(q/2p_F)$ が減少関数であることを思い出そう．) 分母が 0 になるということは $D_{\sigma\tau}(q)$ が発散するということである．このとき，無限小の外場により系に自発的にスピン・アイソスピン密度波が実現することになる．実際，誘起される $\sigma\tau$-密度波は $\langle\lambda|\psi^\dagger(x)\sigma_z\tau_z\psi(x)|\lambda\rangle = \lambda D_{\sigma\tau}(q)\cos\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}$ であった．したがって，$D_{\sigma\tau}(q) \nearrow \infty$ のとき，無限小の外場の強さ $\lambda \to 0+$ で $\sigma\tau$-密度波が実現され，それが源となって古典場としてのパイ場が実現する．すなわち，パイ中間子凝縮の臨界条件が

$$1 - (v_\pi(q) + g')\,D_0(q) = 0 \tag{A.50}$$

で与えられることを意味する．

[注]

1. リンドハード関数 $\Phi(x)$ は $0 \geq x$ において正値を取る単調減少関数である．$x = 1$ $(q = 2p_F)$ において微係数は負に発散しているが連続である．
2. $\Phi(x)$ は空間次元 D により $x = 1$ の特異性が異なり，次元が小さいほどその特異性は大きい．実際，空間次元が 1, 2 の場合それぞれ

$$\Phi^{D=1}(x) = \frac{1}{x}\ln|(1+x)/(1-x)|, \tag{A.51}$$

$$\Phi^{D=2}(x) = 1 \quad (x \leq 1) \tag{A.52}$$

$$= 1 - \frac{1}{x}\sqrt{x^2-1} \quad (1 \leq x) \tag{A.53}$$

となる．$\Phi^{D=2}(x)$ は $x = 1$ で微分不可能だが有限で連続である．ところが，$\Phi^{D=1}(x)$ は $x = 1$ で値自体発散している．これが 1 次元系でパイエルス転移による密度波（電荷密度波）やオーバーハウザー転移によるスピン密度波が起こる理由である．3 次元系でも結晶構造のために擬 1 次元的なフェルミ面がある場合（ネスティングがあるという），密度波やスピン密度波ができやすくなる．

A.7 パイ凝縮の前駆的集団モードとそのソフト化

核物質がパイ凝縮相になる「素質 (predisposition)」があるならば，それは非パイ凝縮相における核物質のどのような物性に反映しているだろうか？ それは，パイ場に結合したスピン・アイソスピン密度の動的な揺らぎの特異な振る舞いに現れる．すなわち，系が臨界点に近づくと，有限波数を持つスピン・アイソスピンモードの励起エネルギーが小さくなり（ソフト化し），臨界点ではそのエネルギーがゼロになり，そのような密度波が固定される，と理解される．以上の描像は線型応答理論によって明快に記述することができる．

特に，密度を上げていったとき（$p_F \to$ 大）ある波数 q_c において $\omega(q_C) \searrow 0$

になる場合，すなわち，スピン・アイソスピン密度モードがソフト化するとき，無限小のエネルギーで自発的に波数 q_c のスピン・アイソスピン密度波が実現することを意味する．これが π^0 凝縮である．

なお，有限核中では運動量ではなく角運動量がよい量子数になるので，一般にはパイ中間子型モード（縦波モード）とロー中間子型モード（横波モード）が結合するので，パイ中間子凝縮の前駆モードどころかそのチャンネルの粒子-空孔間の引力を検証すること自体が簡単にはいかない．運動学的に縦波モードを取り出さないといけないからである．パイ中間子凝縮の前駆現象を有限核のガモフ–テラー型巨大共鳴を含む高励起状態のスペクトルに見出す可能性については文献 [140], [141] で議論されている．

A.8　現実的重粒子間力を用いることの必要性

ひとたび，パイ凝縮が核子（重粒子系）のスピン・アイソスピン秩序を伴う構造相転移であると喝破されたならば，この相転移あるいはその前駆モードの研究にパイ場をあらわに用いたハミルトニアンを用いる必要はないし，必ずしも適切とは言えない．特に，パイ中間子交換力以外の効果を g' のみで代用する計算は誤った「あたりをつける」ための便法程度に考えるべきである．パイ中間子凝縮への相転移が 2 次相転移である場合にのみその相転移点を評価するのに有効であり得る．実際は凝縮相における大きな引力のためにパイ凝縮の相転移，特に，中性パイ中間子凝縮は 1 次相転移になり得る [142]．有効相互作用の構成は未だ定説があるとはいい難いが，伝統的な手法であるブリュックナー理論 [133] に基づくもの [143] を採用した解析の結果は以下の通りである [142]．

この相互作用のスピン・アイソスピン部分は次のように書ける：

$$V_{\mathrm{ph}}(1,2) = \boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2 [V_{\sigma\tau}(r) \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 + V_{T\tau} S_{12}(\hat{\boldsymbol{r}})], \tag{A.54}$$

$$= \boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2 \int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3} [(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{k}})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \hat{\boldsymbol{k}}) L(k^2) + (\boldsymbol{\sigma}_1 \times \hat{\boldsymbol{k}})(\boldsymbol{\sigma}_2 \times \hat{\boldsymbol{k}}) T(k^2)] \mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}. \tag{A.55}$$

ここで縦波成分 $L(k^2)$ と横波成分 $T(k^2)$ は中心力 $V_{\sigma\tau}(r)$ とテンソル力 $V_{T\tau}(r)$ のそれぞれのフーリエ成分 $K_{\sigma\tau}(k^2)$，$K_{T\tau}(k^2)$ を用いて，

$$L(k^2) = 2K_{T\tau}(k^2) + K_{\sigma\tau}(k^2), \tag{A.56}$$

$$T(k^2) = -K_{T\tau}(k^2) + K_{\sigma\tau}(k^2) \tag{A.57}$$

と書ける．有効核力の縦波部分 $L(k^2)$ が OPEP+g' に対応していることに注意．数値計算によれば [142]，デルタ共鳴 $\Delta(1232)$ の効果を取り入れていない不十分な模型ではパイ凝縮相の最小値自体は密度とともに増大し，どんな高い密度でもパイ中間子凝縮は起こることはないが，$\Delta_{33}(1232)$ の効果を取り入れる

と，$N=Z$ の対称核物質の場合，臨界密度 $\rho_s\sim 2\rho_0$ で相転移が起こる．次数は 1 次である．中性子物質では，臨界密度は少なくとも $4\rho_0$ 以上である．

参考文献

[1] C. Itzykson and J.-B. Zuber, Quantum Field Theory, McGraw-Hill, 1980.

[2] 西島和彦，場の量子論，紀伊國屋数学叢書 27，紀伊國屋書店，1987.

[3] 九後汰一郎，ゲージ場の量子論 I，新物理学シリーズ 23，培風館，1989.

[4] 藤川和男，ゲージ場の理論，岩波講座「現代の物理学 20」，岩波書店，1993.

[5] S. Pokorski, Gauge Field Theories, 2nd ed, Cambridge University Press, 2000.

[6] 近藤慶一，ゲージ場の量子論 質量ギャップとクォーク閉じ込めの解決に向けて，臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリ–45，サイエンス社，2006（電子版 2013）.

[7] Y. Nambu, Phys. Rev. **117** (1960) 648.

[8] J. Bardeen, L. N. Cooper and J. R. Schrieffer, Phys. Rev. **106** (1957) 162; Phys. Rev. **108** (1957) 1175.

[9] M. L. Goldberger and S. B. Treiman, Phys. Rev. **110** (1958) 1478.

[10] Y. Nambu, Phys. Rev. Lett. **4** (1960) 380.

[11] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **122** (1961) 345; Phys. Rev. **124** (1961) 246.

[12] 坂井典佑，場の量子論，裳華房，2002.

[13] 佐藤光，物理数学特論 群と物理，パリティ物理学コース，丸善，1993.
ハワード ジョージァイ（九後汰一郎訳），物理学におけるリー代数—アイソスピンから統一理論へ—，吉岡書店，2010.

[14] S. Gasiorowicz and D. A. Geffen, Rev. Mod. Phys. **41** (1969) 531.

[15] J. J. Sakurai, Currents and Mesons, Chicago Lectures in Physics, The University of Chicago Press, 1969.

[16] Ta-Pei Cheng and Ling-Fong Li, Gauge theory of elementary particle physics, Oxford, 1984.

[17] M. Gell-Mann and M. Lévi, Nuovo Cimento, **16** (1960) 705.

[18] L. I. シッフ（井上健訳),「量子力学」，吉岡書店，新版 1970.

[19] G. S. Guralnik, C. R. Hagen and T. W. B. Kibble, in Advances in Particle Physics, eds. R. L. Cool and R. E. Marshak, vol.2, p.567 Interscience Pub., N.Y., 1968.

[20] 九後汰一郎，ゲージ場の量子論 II，新物理学シリーズ 24，培風館，1989.

[21] 青木慎也，格子上の場の理論（シュプリンガー現代理論物理学シリーズ），丸善，2012.

[22] S. Gasiorowicz and J. Rosner, Am. J. Phys. **49** (1981) 954.

[23] J. Beringer *et al.* (Particle Data Group), Phys. Rev. D**86** (2012) 010001 [→http://prd.aps.org/abstract/PRD/v86/i1/e010001].

[24] Y. Nambu, Phys. Rev. D **10** (1974) 4262; G. 't Hooft, in High Energy Physics, ed. by A. Zichichi (Editorice Compositori, Bologna, 1975); S. Mandelstam, Phys. Rep. **23** (1976)

245.
[25] H. B. Nielsen and P. Olesen, Nucl. Phys. B **61** (1973) 45.
[26] 橋本省二，原子核研究 **53** Supplement **3**（2009 年 4 月）p.65.
[27] T. Banks and A. Casher, Nucl. Phys. B **169** (1980) 103.
[28] S. Weinberg, Quantum Theory of Fields, Vol. II, Cambridge, 1996.
[29] 藤川和男，経路積分と対称性の量子的破れ，岩波書店，2001.
[30] M. Gell-Mann, R. J. Oakes and B. Renner, **175** (1968) 2195.
[31] F. E. Close, An Introduction to Quarks and Partons, Academic Press, London, 1979.
[32] S. Okubo, Phys. Lett. B **5** (1063) 165; G. Zweig, Proceedings of the Int. School of Physics "Ettore Majonara", Erice, Italy, 1964 ed. by A. Zichichi (Academic press, N.Y. 1965); J. Iizuka, Prog. Theor. Phys. Suppl. **37-38** (1966) 21. 初期の総合報告として，S. Okubo, Prog. Theor. Phys. Suppl. **63** (1978) 1. また，日本語による解説は，矢崎茂夫，OZI 則（物理学最前線 7 所収），共立出版，1985.
[33] G. 't Hooft, Phys. Rev. D **14** (1976) 3432 [Erratum-ibid. D **18** (1978) 2199]; Phys. Rep. **142** (1986) 357.
[34] M. Kobayashi and T. Maskawa, Prog. Theor. Phys. **44** (1970) 1422.
[35] J. Schechter and Y. Ueda, Phys. Rev. D **3** (1971) 168; P. Carruthers and R. W. Haymaker, Phys. Rev. D **4** (1971) 1808.
[36] H. Pagels, Phys. Rept. **16** (1975) 219.
[37] M. Ishida, Prog. Theor. Phys. **101** (1999) 661; J. T. Lenaghan, D. H. Rischke and J. Schaffner-Bielich, Phys. Rev. D **62** (2000) 085008.
[38] T. Schafer and E. V. Shuryak, Rev. Mod. Phys. **70** (1998) 323.
[39] T. Hatsuda and T. Kunihiro, Phys. Rept. **247** (1994) 221.
[40] 恒藤敏彦，超伝導・超流動，現代物理学叢書，岩波書店，2001; J. R. シュリーファー（樺沢宇紀訳），超伝導の理論，丸善，2010.
[41] A. L. Fetter and H. D. Walecka, Quantum Theory of Many-Particle Systems, McGraw-Hill, 1971.
[42] N. N. Bogoliubov, Nuovo Cimento **7**, 794 (1958); N. N. Bogoliubov, V. V. Tolmachev, and D. V. Schirkov, A New Method in the Theory of Superconductivity (Consultants Bureau, New York, 1959); J. G. Valatin, Nuovo Cimento **7**, 843 (1958).
[43] 野上茂吉郎，原子核，基礎物理学選書 13，裳華房，第 6 版 1973.
[44] S. M. Schmidt, D. Blaschke and Y. L. Kalinovsky, Phys. Rev. C **50** (1994) 435; M. G. Alford, K. Rajagopal and F. Wilczek, Phys. Lett. B **422** (1998) 247; T. Kojo, Y. Hidaka, K. Fukushima, L. D. McLerran and R. D. Pisarski, Nucl. Phys. A **875** (2012) 94.
[45] T. Kunihiro, unpublished (1989).
[46] T. Kunihiro and T. Hatsuda, Prog. Theor. Phys. **71** (1984) 1332; K. Higashijima, Prog. Theor. Phys. Suppl. **104** (1991) 1.
[47] T. Hatsuda and T. Kunihiro, Phys. Lett. B **145** (1984) 7; T. Hatsuda and T. Kunihiro,

Prog. Theor. Phys. **74** (1985) 765.

[48] T. Hatsuda and T. Kunihiro, Phys. Rev. Lett. **55** (1985) 158.

[49] D. V. Bugg, Eur. Phys. J. C **33** (2004) 505; T. E. O. Ericson, B. Loiseau, and A. W. Thomas, Phys. Rev. C**66** (2002) 014005.

[50] A. Manohar and H. Georgi, Nucl. Phys. B **234** (1984) 189.

[51] 国広悌二，素粒子論研究 **77**, No.4(1988) pp. D16-D32.

[52] T. Kunihiro and T. Hatsuda, Phys. Lett. B **206** (1988) 385 [Erratum-ibid. **210** (1988) 278].

[53] M. Kobayashi, H. Kondo and T. Maskawa, Prog. Theor. Phys. **45** (1971) 1955.

[54] V. Mirelli and J. Schechter, Phys. Rev. D **15** (1977) 1361.

[55] T. Kunihiro, Prog. Theor. Phys. **80** (1988) 34.

[56] V. Bernard, R. L. Jaffe and U. G. Meissner, Nucl. Phys. B **308** (1988) 753.

[57] H. Reinhardt and R. Alkofer, Phys. Lett. B **207** (1988) 482.

[58] M. Takizawa, K. Tsushima, Y. Kohyama and K. Kubodera, Prog. Theor. Phys. **82** (1989) 481.

[59] E. Reya, Rev. Mod. Phys. **46** (1974) 545; T. P. Cheng, Phys. Rev. D **13** (1976) 2161; R. L. Jaffe, Phys. Rev. D **21** (1980) 3215; C. A. Dominguez and P. Langacker, Phys. Rev. D **24** (1981) 1905.

[60] M. Takizawa, T. Kunihiro and K. Kubodera, Phys. Lett. B **237** (1990) 242; M. Takizawa and W. Weise, Phys. Lett. B **268** (1991) 323.

[61] M. Birkel and H. Fritzsch, Phys. Rev. D **53** (1996) 6195.

[62] L. J. Reinders, H. Rubinstein and S. Yazaki, Phys. Rept. **127** (1985) 1.

[63] A. De Rujula, H. Georgi and S. L. Glashow, Phys. Rev. D **12** (1975) 149.

[64] N. Isgur and G. Karl, Phys. Rev. D **18** (1978) 4187; ibid., **19** (1979) 2653.

[65] L. -H. Chan, Phys. Rev. Lett. **39** (1977) 1124; M. D. Scadron, Rep. Prog. Phys. **44** (1981) 14; D. W. McKay and H. J. Munczek, Phys. Rev. **D32** (1985) 266; A. Manohar and H. Georgi, Nucl. Phys. **B234** (1984) 189.

[66] T. Kunihiro and T. Hatsuda, Phys. Lett. B**240** (1990) 209.

[67] T. Hatsuda and T. Kunihiro, Nucl. B **387** (1992) 715.

[68] D. Toussaint and W. Freeman, Phys. Rev. Lett. **103** (2009) 12202; arXiv:1204.3866 [hep-lat]; P. Junnarkar and A. Walker-Loud, arXiv:1301.1114 [hep-lat]; M. Gong, A. Alexandru, Y. Chen, T. Doi, S. J. Dong, T. Draper, W. Freeman and M. Glatzmaier *et al.*, arXiv:1304.1194 [hep-ph].

[69] H. Ohki, H. Fukaya, S. Hashimoto, T. Kaneko, H. Matsufuru, J. Noaki, T. Onogi and E. Shintani *et al.*, Phys. Rev. D **78** (2008) 054502; H. Ohki *et al.* [JLQCD Collaboration], arXiv:1208.4185 [hep-lat].

[70] R. Delbourgo and M. D. Scadron, Phys. Rev. Lett. **48** (1982) 379; V. Elias and M. D. Scadron, Phys. Rev. Lett. **53** (1984) 1129; T. Hatsuda and T. Kunihiro, Prog.

Theor. Phys. **74** (1985) 765; E. van Beveren, T. A. Rijken, K. Metzger, C. Dullemond, G. Rupp and J. E. Ribeiro, Z. Phys. C **30** (1986) 615.

[71] N. A. Tornqvist and M. Roos, Phys. Rev. Lett. **76** (1996) 1575; M. Harada, F. Sannino and J. Schechter, Phys. Rev. D **54** (1996) 1991; S. Ishida, M. Ishida, H. Takahashi, T. Ishida, K. Takamatsu and T. Tsuru, Prog. Theor. Phys. **95** (1996) 745; S. Ishida, M. Ishida, T. Ishida, K. Takamatsu and T. Tsuru, Prog. Theor. Phys. **98** (1997) 621; J. A. Oller and E. Oset, Nucl. Phys. A **620** (1997) 438 [Erratum-ibid. A **652** (1999) 407].

[72] I. Caprini, G. Colangelo and H. Leutwyler, Phys. Rev. Lett. **96** (2006) 132001.

[73] T. Kunihiro, Prog. Theor. Phys. Suppl. No. 120 (1995) 75; AIP Conf. Proc. **619** (2002) 315; Prog. Theor. Phys. Suppl. No. 168 (2007) 156; F. E. Close and N. A. Tornqvist, J. Phys. G **28** (2002) R249.

[74] R. L. Jaffe, Phys. Rev. D **15** (1977) 267.

[75] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn and V. F. Weisskopf, Phys. Rev. D **9** (1974) 3471; A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson and C. B. Thorn, Phys. Rev. D **10** (1974) 2599; T. A. DeGrand, R. L. Jaffe, K. Johnson and J. E. Kiskis, Phys. Rev. D **12** (1975) 2060.

[76] D. Black, A. H. Fariborz and J. Schechter, Phys. Rev. D **61** (2000) 074001; L. Maiani, F. Piccinini, A. D. Polosa and V. Riquer, Phys. Rev. Lett. **93** (2004) 212002; A. H. Fariborz, R. Jora and J. Schechter, Phys. Rev. D **77** (2008) 034006; G. 't Hooft, G. Isidori, L. Maiani, A. D. Polosa and V. Riquer, Phys. Lett. B **662** (2008) 424; T. Teshima, I. Kitamura and N. Morisita, J. of Phys. G **28** (2002) 1391; J. of Phys. G **30** (2004) 663; A. H. Fariborz, R. Jora and J. Schechter, Phys. Rev. D **77** (2008) 094004.

[77] F. Englert and R. Brout, Phys. Rev. Lett.**13** (1964) 321; P. Higgs, Phys. Lett. **12** (1964) 132; Phys. Rev. Lett. **13** (1964) 508; G. S. Guralnik, C. R. Hagen and T. W. B. Kibble, Phys. Rev. Lett. **13** (1964) 585.

[78] J. A. Oller and E. Oset, Nucl. Phys. A **620** (1997) 438 [Erratum-ibid. A **652** (1999) 407]; リビューとして，J. A. Oller, E. Oset and A. Ramos, Prog. Part. Nucl. Phys. **45** (2000) 157.

[79] T. Kunihiro S. Muroya, A. Nakamura, C. Nonaka, M. Sekiguchi and H. Wada [SCALAR Collaboration], Phys. Rev. D **70** (2004) 034504.

[80] R. L. Jaffe, Phys. Rev. Lett. **38** (1977) 195; [Erratum-ibid. **38** (1977) 617.].

[81] M. Oka, hep-ph/9510354.

[82] M. Oka and S. Takeuchi, Nucl. Phys. A **524** (1991)649; S. Takeuchi and M. Oka, Phys. Rev. Lett. **66** (1991) 1271.

[83] T. Inoue *et al.* [HAL QCD Collaboration], Phys. Rev. Lett. **106** (2011) 162002.

[84] C. J. Yoon, H. Akikawa, K. Aoki, Y. Fukao, H. Funahashi, M. Hayata, K. Imai and K. Miwa *et al.*, Phys. Rev. C **75** (2007) 022201.

[85] 原島鮮，熱力学・統計力学，培風館，改訂版 1978.

[86] エリ・ランダウ，イェー・リフシッツ（小林 秋男 他 訳），統計物理学，岩波書店，1980.

[87] L. E. Reichl, A Modern Course in Statistical Physics, 2nd ed., John Wiley and Sons, 1998.

[88] K. Rajagopal and F. Wilczek, The condensed matter physics of QCD, In Shifman, M. (ed.): At the frontier of particle physics, vol. **3** 2061-2151 [hep-ph/0011333].

[89] M. G. Alford, A. Schmitt, K. Rajagopal and T. Schafer, Rev. Mod. Phys. **80** (2008) 1455.

[90] J. C. Collins and M. J. Perry, Phys. Rev. Lett. **34** (1975) 1353.

[91] 神吉健，クォーク・グルーオン・プラズマ（パリティ物理学コース クローズアップ），丸善，1992.

[92] K. Yagi, T. Hatsuda and Y. Miake, Quark-Gluon Plasma: From Big Bang To Little Bang, Camb. Monogr. Part. Phys. Nucl. Phys. Cosmol. **23**, Cambrdge, 2005.

[93] 玉垣良三，高密度核物質（物理学最前線 15 所収），共立出版，1986.

[94] T. Kunihiro, T. Muto, T. Takatsuka, R. Tamagaki and T. Tatsumi, Prog. Theor. Phys. Suppl. **112** (1993).

[95] M. Gyulassy and L. McLerran, Nucl. Phys. A **750** (2005) 30.

[96] B. Muller, J. Schukraft and B. Wyslouch, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **62** (2012) 361.

[97] J. Gasser, Annals Phys. **136** (1981) 62; J. Gasser and H. Leutwyler, Phys. Rept. **87** (1982) 77.

[98] P. Gerber and H. Leutwyler, Nucl. Phys. B **321** (1989) 387.

[99] M. Asakawa and K. Yazaki, Nucl. Phys. A **504** (1989) 668; A. Barducci, R. Casalbuoni, S. De Curtis, R. Gatto and G. Pettini, Phys. Lett. B **231** (1989) 463; Phys. Rev. D **49** (1994) 426.

[100] M. A. Stephanov, Prog. Theor. Phys. Suppl. No. 153 (2004) 139.

[101] Z. Zhang and T. Kunihiro, Phys. Rev. D **83** (2011) 114003.

[102] E. G. Drukarev and E. M. Levin, Nucl. Phys. A **511** (1990) 679 [Erratum-ibid. A **516** (1990) 715]; R. Brockmann and W. Weise, Phys. Lett. B **367** (1996) 40.

[103] G. E. Brown, K. Kubodera and M. Rho, Phys. Lett. B **192** (1987) 273; T. Kunihiro, Prog. Theor. Phys. **80** (1988) 34.

[104] P. Kienle and T. Yamazaki, Prog. Part. Nucl. Phys. **52** (2004) 85; 慈道大介，原子核研究 **53** Supplement **3**（2009 年 4 月）p.89; 延與秀人，ibid, p.100; 早野龍五，ibid, p.110.

[105] S. Roessner, T. Hell, C. Ratti and W. Weise, Nucl. Phys. A **814** (2008) 118.

[106] M. Kitazawa, T. Kunihiro and Y. Nemoto, Phys. Lett. B **633** (2006) 269.

[107] K. Fukushima, Phys. Lett. B **591** (2004) 277.

[108] C. Ratti, M. A. Thaler and W. Weise, Phys. Rev. D **73** (2006) 014019; W. Weise, Prog. Theor. Phys. Suppl. **174** (2008) 1.

[109] T. Umeda, R. Katayama, O. Miyamura and H. Matsufuru, Int. J. Mod. Phys. A **16**

(2001) 2215; M. Asakawa and T. Hatsuda, Phys. Rev. Lett. **92** (2004) 012001; S. Datta, F. Karsch, P. Petreczky and I. Wetzorke, Phys. Rev. D **69** (2004) 094507; T. Umeda, K. Nomura and H. Matsufuru, Eur. Phys. J. C **39S1** (2005) 9; R. Rapp, B. Kampfer, A. Andronic, D. Blaschke, C. Fuchs, M. Harada, T. Hilger and M. Kitazawa *et al.*, In-medium excitations, Lect. Notes Phys. **814** (2011) 335.

[110] J. D. Walecka, Theoretical Nuclear and Subnuclear Physics, 2nd ed., Part 2, World Scientific, 2004.

[111] T. Kunihiro, Phys. Lett. B **271** (1991) 395.

[112] T. Kunihiro, in CONFINEMENT 2000 ed. by H. Suganuma, M. Fukushima and H. Toki, (World Scientific, 2001), p. 287(hep-ph/0007173).

[113] H. Fujii and M. Ohtani, Phys. Rev. D **70** (2004) 014016.

[114] CP K. Kamikado, T. Kunihiro, K. Morita and A. Ohnishi, Prog. Theor. Exp. Phys. (2013) 053D01.

[115] H. Fujii, Phys. Rev. D **67** (2003) 094018; H. Fujii and M. Ohtani, Phys. Rev. D **70** (2004) 014016; Dam. T. Son and M. A. Stephanov, Phys. Rev. D **70** (2004) 056001; Y. Minami and T. Kunihiro, Prog. Theor. Phys. **122** (2010) 881.

[116] V. Bernard, N. Kaiser and U. -G. Meissner, Int. J. Mod. Phys. E **4** (1995) 193.

[117] 原田正康，原子核研究 **53** Supplement **3**（2009 年 4 月）p.76.

[118] 保坂淳，原子核研究 **53** Supplement **3**（2009 年 4 月）p.43.

[119] C. E. Detar and T. Kunihiro, Phys. Rev. D **39** (1989) 2805.

[120] L. Y. Glozman, Phys. Lett. B **475** (2000) 329.

[121] R. L. Jaffe, D. Pirjol and A. Scardicchio, Phys. Rept. **435** (2006) 157.

[122] M. Kitazawa, T. Koide, T. Kunihiro and Y. Nemoto, Phys. Rev. D **70** (2004) 056003; Prog. Theor. Phys. **114** (2005) 117.

[123] E. Nakano and T. Tatsumi, Phys. Rev. D **71** (2005) 114006.

[124] D. Nickel, Phys. Rev. Lett. **103** (2009) 072301; Phys. Rev. D **80** (2009) 074025.

[125] S. Carignano, D. Nickel and M. Buballa, Phys. Rev. D **82** (2010) 054009; T. Kojo, Y. Hidaka, L. McLerran and R. D. Pisarski, Nucl. Phys. A **843** (2010) 37.

[126] K. Fukushima and C. Sasaki, arXiv:1301.6377 [hep-ph].

[127] P. Kovtun, D. T. Son and A. O. Starinets, Phys. Rev. Lett. **94** (2005) 111601.

[128] M. Asakawa, S. A. Bass and B. Muller, Phys. Rev. Lett. **96** (2006) 252301; Prog. Theor. Phys. **116** (2007) 725.

[129] B. Muller and A. Schafer, Int. J. Mod. Phys. E **20** (2011) 2235.

[130] A. B. Migdal, Rev. Mod. Phys. **50** (1978) 107.

[131] R. Peierls, Quantum Theory of Solids, Oxford University Press, 1955; 同訳「固体の量子論」，吉岡書店，1957; G. Grüner, Rev. Mod. Phys. **60** (1988) 1129.

[132] A. W. Overhauser, Phys. Rev. Lett. **4** (1960) 462; G. Grüner, Rev. Mod. Phys. **66** (1994) 1.

[133] M. A. Preston and R. K. Bhaduri, Structure of the Nucleus, Westview Press, 1973; 高木修二，丸森寿夫編，岩波講座現代物理学の基礎 [第 2 版] 9 原子核論，岩波書店，1978.

[134] 高田健次郎，池田清美，原子核構造論（朝倉物理学体系），朝倉書店，2002.

[135] T. Kunihiro, Prog. Theor. Phys. **60** (1978) 1229.

[136] M. Bando, T. Kugo and K. Yamawaki, Phys. Rep. **164** (1988) 217.

[137] G. E. Brown, M. Rho and W. Weise, Nucl. Phys. A **454** (1986) 669.

[138] R. Tamagaki and T. Takatsuka, Prog. Theor. Phys. **56** (1976) 1340.

[139] V. R. Pandharipande, R. A. Smith, Nucl. Phys. A **237** (1975) 507.

[140] T. Suzuki and H. Sakai, Phys. Lett. B **455** (1999) 25; M. Ichimura, H. Sakai and T. Wakasa, Prog. Part. Nucl. Phys. **56** (2006) 446.

[141] T. Kunihiro, Prog. Theor. Phys. **65** (1981) 1098.

[142] T. Kunihiro, T. Takatsuka, R. Tamagaki and T. Tatsumi, Prog. Theor. Phys. Suppl. **112** (1993) 123.

[143] D. W. L. Sprung and P. K. Banerjee, Nucl. Phys. A **168** (1971) 273; D. W. L. Sprung, Nucl. Phys. A **182** (1972) 97.

索　　引

欧字・記号

ア

カ

サ

タ

ナ

ハ

マ

ヤ

ラ

ワ

著者略歴

国広（くにひろ）　**悌二**（ていじ）

1981 年　京都大学大学院理学研究科博士後期課程（物理学第二専攻）修了．
　京都大学博士（理学）
1981 年　日本学術振興会奨励研究員（京都大学理学部物理学第二教室）
1982 年　龍谷大学経済学部助教授（一般教育課程担当）
1989 年　同大学理工学部新設に伴い同学部に移籍
1989 年 9 月–1990 年 8 月　レーゲンスブルグ大学（西独）客員研究員
1993 年　同学部数理情報学科所属
1995 年　同学部教授
2000 年　京都大学基礎物理学研究所教授
2006 年 4 月–2007 年 3 月　京都大学基礎物理学研究所副所長兼任
2007 年　京都大学理学研究科物理学第二専攻教授（原子核理論）併任
2008 年　京都大学理学研究科物理学第二専攻教授（原子核理論）移籍
現在に至る

専　門　原子核理論（クォーク・ハドロン多体系の物理学），
　数理物理，非平衡物理

臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリ- 100
『クォーク・ハドロン物理学入門　真空の南部理論を基礎として』

著　者　国広 悌二

2013 年 9 月 10 日　初版発行

数　理　科　学　編　集　部　　　発行人　木　下　敏　孝

TEL.(03)5474–8816
FAX.(03)5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp まで．

表紙デザイン：長谷部貴志

発行所　©　株式会社　**サイエンス社**　　TEL.(03)5474–8500 (代表)
〒 151–0051　東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　(03)5474–8600 (広告部)

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁

臨時別冊・数理科学（SGC ライブラリ-84：for Senior & Graduate Courses）

演習形式で学ぶ

相転移・臨界現象

宮下精二・轟木義一　共著

本体 2476 円　送料 290 円　表示価格は税抜きです

現象，模型，手法の諸相を幅広く演習形式でとり上げて解説．できるだけ前提知識なしでもわかるように工夫が試みられ，この分野の基本的な考え方を身に付けるのに好適な一冊となっている．

臨時別冊・数理科学（SGC ライブラリ-87：for Senior & Graduate Courses）

量子多体系の物理

量子現象の基礎を理解するために

藤本聡・川上則雄　共著

本体 2190 円　　送料 290 円　　表示価格は税抜きです

多くの粒子が集まることにより，基本法則からは容易に演繹できないような多様な現象が発現する．本書はその発現の源，量子多体系の基本的事項を入門的に解説する．

サイエンス社